Pro gradu -tutkielma

JORDANIN KÄYRÄLAUSE JA SCHÖNFLIESIN LAUSE

Lotta Oinonen

2006

Ohjaaja ja tarkastaja: FT Erik Elfving

Toinen tarkastaja: prof. Sören Illman

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

PL 68 (Gustaf Hällströmin katu 2b)
00014 Helsingin yliopisto

Tiedekunta Osasto— Fakultet Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Lotta Oinonen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Jordanin käyrälause ja Schönfliesin lause

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu	Toukokuu 2006	81 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielmassa esitetään kaksi todistusta Jordanin käyrälauseelle sekä todistetaan Schönfliesin lause. Jordanin käyrä on ympyrän S^1 kanssa homeomorfinen topologinen avaruus. Jordanin käyrälauseen mukaan avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi komponenttia, jos $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä. Toinen komponenteista on rajoittamaton ja toinen rajoitettu, ja Jordanin käyrä J on kummankin komponentin reuna. Schönfliesin lauseen mukaan jokainen upotus $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ voidaan jatkaa homeomorfismiksi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolla $h|S^1 = f$.

Jordanin käyrälause todistetaan aluksi tason monikulmioiden tapauksessa. Todistuksen ideana on tarkastella monikulmion ja x-akselin suuntaisten suorien leikkauspisteiden lukumäärää. Sen jälkeen osoitetaan, että avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen, jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on kaari. Tätä tulosta kutsutaan tutkielmassa Jordanin kaarilauseeksi. Näiden tulosten avulla muotoillaan ensimmäinen Jordanin käyrälauseen todistus, jossa ideana on sulkea Jordanin käyrä tietynlaisen kuusikulmion sisään.

Jordanin käyrälauseen toista todistusta varten tarkastellaan kuvausten nostojen olemassaoloa. Osoitetaan, että jatkuvalla kuvauksella $f\colon X \to S^1$ on p-nosto $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ jos ja vain jos kuvaus f on nollahomotooppinen. Tässä X on topologinen avaruus ja $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ on peitekuvaus. Tarkastellaan myös kuvausten jatkeiden olemassaoloa ja osoitetaan, että nollahomotooppisella jatkuvalla kuvauksella $f\colon A \to S^1$ on nollahomotooppinen jatkuva jatke $h\colon X \to S^1$, jos X on T_4-avaruus ja $A \subset X$ suljettu osajoukko. Todistetaan lisäksi Eilenbergin kriteeri, joka tarkastelee avaruuden $\mathbb{C}$ kompaktia osajoukkoa K ja pisteitä $a, b \in \mathbb{C} \setminus K$. Sen mukaan pisteet a ja b kuuluvat joukon $\mathbb{C} \setminus K$ samaan polkukomponenttiin jos ja vain jos kuvaus $f\colon K \to S^1$, $f(z) = N\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$, on nollahomotooppinen. Tämän avulla saadaan todistettua Jordanin kaarilauseen kaltainen tulos sekä Jordanin käyrälause.

Schönfliesin lause todistetaan ensin tason monikulmioiden tapauksessa. Keskeisinä työvälineinä ovat 2-ulotteisen simpleksin sekä kompleksin käsitteet. Tämän jälkeen osoitetaan, että joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetun komponentin sulkeuma $\bar{X}_1$ on 2-solu eli homeomorfinen 2-simpleksin kanssa. Osoitetaan myös, että jokainen 2-solujen reunojen välinen homeomorfismi voidaan jatkaa 2-solujen väliseksi homeomorfismiksi. Tämän tuloksen avulla voidaan määritellä jokaiselle homeomorfismille $f\colon S^1 \to J$ homeomorfinen jatke $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Jordanin käyrälause, Schönfliesin lause

Säilytyspaikka — Förvaringsställe— Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto, Gustaf Hällstömin katu 2, PL 68

00014 Helsingin yliopisto

Muita tietoja — Övrigauppgifter— Additional information

Sisältö

1. Johdanto

Tässä tutkielmassa esitetään kaksi erilaista todistusta Jordanin käyrälauseelle sekä todistetaan Schönfliesin lause. Jordanin käyrä on ympyrän $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ kanssa homeomorfinen topologinen avaruus. Jordanin käyrälauseen mukaan avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi komponenttia, jos $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä. Toinen näistä komponenteista on rajoittamaton ja toinen rajoitettu, ja Jordanin käyrä J on kummankin komponentin reuna. Jordanin käyrälauseen esitti ensimmäisenä ranskalainen Camille Jordan (1838 - 1922) kirjassaan *Cours d'Analyze de l'École Polythechnique* vuonna 1887. Tulosta oli pitkään pidetty niin ilmeisenä, ettei kukaan ollut vaivautunut yrittämään sen todistamista. Jordanin esittämä todistus oli kuitenkin virheellinen, ja ensimmäisen virheettömän todistuksen esitti yhdysvaltalainen Oswald Veblen vuonna 1905. Tämän jälkeen heräsi kysymys, ovatko avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentit homeomorfisia avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ komponenttien kanssa. Vuonna 1906 saksalainen Arthur Schönflies (1853 - 1928) osoitti, että tämä pitää paikkansa. Schönfliesin lauseen mukaan jokainen upotus $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ voidaan jatkaa homeomorfismiksi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolla siis $h|S^1 = f$. Schönfliesin esittämässä todistuksessa oli joitain virheitä, jotka hollantilainen Luitzen Brouwer korjasi esittäessään ensimmäisen virheettömän todistuksen vuonna 1909. Brouwer ryhtyi myös pohtimaan, yleistyisikö Schönfliesin lause korkeampiin ulottuvuuksiin. Vuonna 1912 hän osoitti, että avaruudella $\mathbb{R}^n \setminus fS^{n-1}$ on kaksi komponenttia, jos $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ on upotus. Brouwer ei kuitenkaan pystynyt osoittamaan, että avaruuden $\mathbb{R}^3 \setminus fS^2$ komponentit olisivat homeomorfisia avaruuden $\mathbb{R}^3 \setminus S^2$ komponenttien kanssa aina, kun $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ on upotus. Vuonna 1921 yhdysvaltalainen James Waddell Alexander ilmoitti todistaneensa tämän Schönfliesin lauseen yleistyksen. Ennen artikkelinsa julkaisua hän kuitenkin löysi todistuksestaan virheen, ja vuonna 1924 hän esitti vastaesimerkin (*Alexander's horned sphere*), joka todisti, ettei Schönfliesin lause yleisty kolmiulotteiseen avaruuteen.

Tässä tutkielmassa esitettävistä Jordanin käyrälauseen todistuksista ensimmäinen pohjautuu Lawsonin [2] ja Moisen [3] esittämiin todistuksiin. Alkuperäinen tarkoitus oli käyttää tämän todistuksen pohjana Kosniowskin [1] esittämää todistusta. Lähempi tarkastelu kuitenkin osoitti, että sen esittäminen täsmällisesti johti kohtuuttoman monimutkaisiin tarkasteluihin, joten suunnitelmaa muutettiin. Nyt esitettävä todistus I jakaantuu kolmeen osaan: aluksi todistetaan Jordanin käyrälause tason monikulmioiden tapauksessa, sen jälkeen todistetaan Jordanin kaarilause ja lopuksi tämän avulla itse Jordanin käyrälause. Jordanin kaarilauseella tarkoitetaan tässä tulosta, jonka mukaan avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen, jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on kaari. Jordanin käyrälauseen ensimmäisen todistuksen seuraamiseen riittävät Topologia I -kurssia vastaavat esitiedot.

Jordanin käyrälauseen todistus II pohjautuu Wallin [5] esittämään todistukseen. Se on lähestymistavaltaan teoreettisempi: aluksi tarkastellaan kuvausten nostojen ja jatkeiden olemassaoloa sekä todistetaan ns. Eilenbergin kriteeri. Sen seurauksena saadaan Jordanin kaarilausetta vastaava tulos. Varsinainen Jordanin käyrälauseen todistus jakaantuu tässäkin todistuksessa kahteen osaan: aluksi tarkastellaan erikoistapausta, jossa Jordanin käyrä sisältää janan, ja vasta sen jälkeen todistetaan varsinainen Jordanin käyrälause. Todistuksen seuraamista helpottavat Topologia II -kurssia vastaavat esitiedot.

Schönfliesin lauseen todistus pohjautuu Moisen [3] esittämään todistukseen ja vastaa siten lähestymistavaltaan enemmän Jordanin käyrälauseen ensimmäistä todistusta. Myös Schönfliesin lause todistetaan aluksi tason monikulmioiden tapauksessa. Keskeisinä työvälineinä ovat 2-ulotteisen simpleksin sekä kompleksin käsitteet. Yleisen tapauksen todistusta varten osoitetaan, että joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetun komponentin sulkeuma on homeomorfinen 2-simpleksin kanssa. Tämänkin todistuksen seuraamiseen riittänevät Topologia I -kurssia vastaavat esitiedot.

Tämä johdantoluku pohjautuu osittain lähteisiin [8] ja [9].

2. Jordanin käyrälause tason monikulmioille

Tässä luvussa määritellään aluksi käsitteet *Jordanin käyrä* ja *monikulmio*. Sen jälkeen osoitetaan, että jokainen tason $\mathbb{R}^2$ monikulmio on Jordanin käyrä. Lopuksi todistetaan Jordanin käyrälause tason monikulmioille: jos $J \subset \mathbb{R}^2$ on monikulmio, niin avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi komponenttia, joista toinen on rajoitettu ja toinen rajoittamaton, ja monikulmio J on niiden kummankin reuna. Lähteenä on käytetty kirjaa [2].

Määritelmä 2.1. Topologinen avaruus J on *Jordanin käyrä,* jos se on homeomorfinen ympyrän S^1 kanssa. Tasossa $\mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä J määritellään upotuksen $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ avulla. Jordanin käyrä $J \subset \mathbb{R}^2$ on tällaisen upotuksen kuvajoukko fS^1, joka on siis homeomorfinen ympyrän S^1 kanssa.

Seuraavaan lauseeseen on koottu joitain Jordanin käyrien ominaisuuksia:

Lause 2.2. *Jordanin käyrä $J \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti, suljettu ja rajoitettu. Sen komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on avoin.*

Todistus: Olkoon $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ upotus, jolla $J = fS^1$. Kuvaus f on jatkuva ja ympyrä S^1 on kompakti, joten Jordanin käyrä J on kompakti. Tason $\mathbb{R}^2$ kompaktina osajoukkona se on suljettu ja rajoitettu, ja sen komplementti $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on avoin. □

Avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponenteista tiedetään heti seuraavaa:

Lause 2.3. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Tällöin avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentit ovat avoimia ja murtoviivayhtenäisiä.*

Todistus: Lauseen 2.2 mukaan joukko $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Kirjassa [6] on osoitettu, että normiavaruuden avoimen joukon komponentit ovat avoimia (Lause 14.36) ja että jokainen normiavaruuden avoin ja yhtenäinen joukko on murtoviivayhtenäinen (Lause 14.30). Joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentit ovat siis avoimia. Yhtenäisinä ja avoimina normiavaruuden $\mathbb{R}^2$ joukkoina ne ovat murtoviivayhtenäisiä. □

Määritelmä 2.4. *Monikulmio* $J \subset \mathbb{R}^2$ on yhdiste äärellisen monesta janasta $L_0 = [v_0, v_1], L_1 = [v_1, v_2], \ldots, L_{n-1} = [v_{n-1}, v_0]$ $(n \geq 3)$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) peräkkäiset janat L_i ja L_{i+1} ovat erisuuntaiset jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$
(2) peräkkäiset janat L_i ja L_{i+1} leikkaavat toisensa vain yhteisessä päätepisteessään v_{i+1} jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$
(3) jos janoilla L_i ja L_j ei ole yhteistä päätepistettä eli $i \neq j \neq i \pm 1$, niin $L_i \cap L_j = \emptyset$.

Janat L_i ovat monikulmion sivut ja niiden päätepisteet v_i ovat monikulmion kärjet.

Lemma 2.5. *Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon $A \subset X$. Olkoon $f \colon X \to Y$ homeomorfismi. Tällöin rajoittuman $f|A$ määrittelemä kuvaus $f_1 \colon A \to fA$ on homeomorfismi.*

Todistus: Rajoittuman $f|A$ määrittelemä kuvaus $f_1 \colon A \to fA$ on jatkuva bijektio. Sen käänteiskuvaus $f_1^{-1} \colon fA \to A$ on rajoittuman $f^{-1}|fA$ määrittelemä, joten myös se on jatkuva. □

Osoitetaan seuraavaksi, että tason monikulmiot ovat Jordanin käyriä. Näin on mielekästä osoittaa Jordanin käyrälause aluksi monikulmioiden tapauksessa.

Lause 2.6. *Jokainen monikulmio $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Osoitetaan, että on olemassa homeomorfismi $h \colon S^1 \to J$, mikä todistaa väitteen. Olkoot $L'_0 = [(1,0),(0,1)]$, $L'_1 = [(0,1),(-1,0)]$, $L'_2 = [(-1,0),(0,-1)]$ ja $L'_3 = [(0,-1),(1,0)]$. Olkoon $J' = \cup_{i=0}^{3} L'_i \subset \mathbb{R}^2$ nelikulmio, jonka kärkipisteet ovat siis $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ja $(0,-1)$. Osoitetaan aluksi, että on olemassa homeomorfismi $h_1 \colon S^1 \to J'$: Määritellään kuvaus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f(x,y) = \begin{cases} (x, \sqrt{y^2 + 2|x|y}), & \text{jos } y \geq 0 \\ (x, -\sqrt{y^2 - 2|x|y}), & \text{jos } y \leq 0. \end{cases}$$

Määritellään kuvaus $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$g(x,y) = \begin{cases} (x, \sqrt{x^2 + y^2} - |x|), & \text{jos } y \geq 0 \\ (x, -\sqrt{x^2 + y^2} + |x|), & \text{jos } y \leq 0. \end{cases}$$

Kuvaus f on jatkuva, sillä se on lausekkeensa perusteella jatkuva suljetuissa puolitasoissa, samoin kuvaus g. Laskemalla voidaan tarkistaa, että $f(g(x,y)) = (x,y) = g(f(x,y))$ olipa $y \geq 0$ tai $y \leq 0$. Näin $g = f^{-1}$ eli kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on homeomorfismi ja g on sen käänteiskuvaus.

Osoitetaan vielä, että $fJ' = S^1$: Olkoon $(x,y) \in J'$. Oletetaan, että $y \geq 0$ ja $x \geq 0$. Tällöin $y = -x+1$. Kuvapisteen $f(x,y)$ etäisyys origosta on $|f(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2+2xy} = |x+y| = x+y = x+(-x+1) = 1$. Näin $f(x,y) \in S^1$. Vastaavasti voidaan tarkistaa loput kolme tapausta. Olkoon sitten $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus J'$. Oletetaan, että $y \geq 0$ ja $x \geq 0$. Tällöin $y \neq -x+1$, joten $|f(x,y)| = x+y \neq 1$. Näin $f(x,y) \notin S^1$. Loput kolme tapausta voidaan jälleen tarkistaa vastaavasti. Siis $f(x,y) \in S^1$ jos ja vain jos $(x,y) \in J'$, joten $fJ' = S^1$.

Olkoon $h_1\colon S^1 \to f^{-1}S^1 = J'$ homeomorfismin f^{-1} rajoittuman määrittelemä kuvaus. Lemman 2.5 nojalla kuvaus h_1 on homeomorfismi. Janat L_0' ja L_1' voidaan kuvata homeomorfisesti janoiksi L_0 ja L_1, ja murtoviiva $L_2' \cup L_3'$ voidaan kuvata homeomorfisesti murtoviivaksi (tai janaksi) $\cup_{i=2}^{n-1} L_i$ $(n \geq 3)$. Näin on olemassa homeomorfismi $h_2\colon J' \to J$. Etsitty homeomorfismi on yhdistetty kuvaus $h = h_2 \circ h_1\colon S^1 \to J$. $\square$

Tässä luvussa oletetaan tästä lähtien, että tarkasteltavan monikulmion mikään sivu ei ole x-akselin suuntainen. Tämä oletus voidaan tehdä, koska monikulmion sivuja on äärellinen määrä, ja näin x-akselin suunta voidaan valita kaikkien sivujen suunnista poikkeavaksi.

Jokaisen monikulmion $J \subset \mathbb{R}^2$ kärjet v_i voidaan jakaa *normaaleihin kärkiin* ja *erikoiskärkiin*. Erikoiskärkiä ovat ne kärjet, joissa monikulmion pisteiden y-koordinaatti saa lokaalin ääriarvon. Muut kärjet ovat normaaleja kärkiä. Erikoiskärjistä *maksimikärkiä* ovat ne kärjet, joissa monikulmion pisteiden y-koordinaatti saa lokaalin maksimiarvon, ja *minimikärkiä* vastaavasti ne kärjet, joissa monikulmion pisteiden y-koordinaatti saa lokaalin minimiarvon. Kuvassa 1 maksimikärkiä ovat kärjet v_1, v_3 ja v_6, ja minimikärkiä kärjet v_2, v_5 ja v_7. Muut kärjet ovat normaaleja kärkiä.

Seuraavassa lemmassa tarkastellaan x-akselin suuntaisten suorien ja monikulmion J leikkauspisteiden lukumäärää. Tämän kautta pystytään Lauseessa 2.8 osoittamaan, että avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on ainakin kaksi komponenttia.

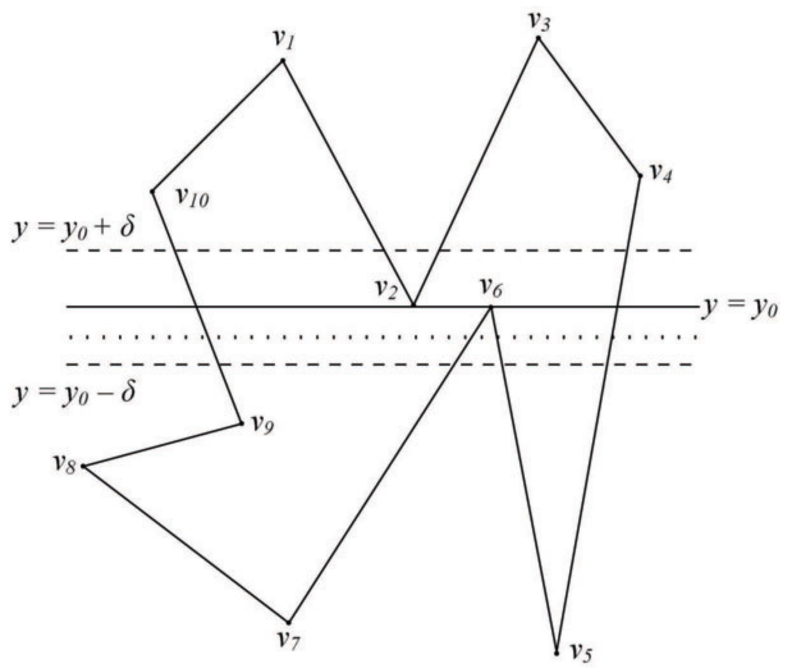
Lemma 2.7. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Jokaisen x-akselin suuntaisen suoran ja monikulmion J leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on parillinen.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Tarkastellaan x-akselin suuntaista suoraa korkeudella y. Olkoon sen ja monikulmion J leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta $k(y)$. Määritellään funktio $h\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$ asettamalla

$$h(y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k(y) \equiv 0 \pmod 2 \\ 1, & \text{jos } k(y) \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Olkoon $y_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon suoran $y = y_0$ ja monikulmion J leikkauspisteiden lukumäärä $m_1 + m_2 + k(y_0)$, missä m_1 on maksimikärkien lukumäärä ja m_2 on minimikärkien lukumäärä. Leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on siis $k(y_0)$. Osoitetaan, että funktio h on jatkuva pisteessä y_0. On siis löydettävä sellainen positiivinen luku δ, että kun $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$, niin $h(y) = h(y_0)$.

Olkoon $E = \{v_i : pr_2(v_i) \neq y_0\}$. Joukkoon E kuuluvat siis kaikki ne monikulmion J kärkipisteet v_i, jotka eivät kuulu suoralle $y = y_0$. Joukko E on äärellinen, joten joukolla $\{|pr_2(v_i) - y_0| : v_i \in E\}$ on pienin alkio, joka on positiivinen. Olkoon $\delta = \frac{1}{2}\min\{|pr_2(v_i) - y_0| : v_i \in E\}$.



Kuva 1

Tarkastellaan x-akselin suuntaista suoraa korkeudella y, missä $y \in]y_0 - \delta, y_0[$ (Kuva 1). Luku δ valittiin niin, ettei joukossa $\mathbb{R} \times]y_0 - \delta, y_0[$ ole yhtään kärkeä. Tämän vuoksi kyseinen suora leikkaa samat $k(y_0)$ sivua kuin suora $y = y_0$ ja lisäksi jokaista suoralle $y = y_0$ kuuluvaa maksimikärkeä kohti kaksi monikulmion sivua. Kyseisen suoran ja monikulmion J leikkauspisteiden lukumäärä on siis $k(y_0) + 2m_1$. Vastaavasti, jos $y \in]y_0, y_0 + \delta[$, niin jokaisen x-akselin suuntaisen korkeudella y olevan suoran ja monikulmion J leikkauspisteiden lukumäärä on $k(y_0) + 2m_2$. Kummassakin tapauksessa leikkauspisteiden lukumäärä on $k(y) = k(y_0) + 2m$, missä $m \in \{m_1, m_2\}$, ja yksikään leikkauspiste ei ole erikoiskärki. Siis $k(y) \equiv k(y_0) \pmod 2$, joten $h(y) = h(y_0)$. Näin funktio h on jatkuva pisteessä y_0.

Luku y_0 saattoi olla mikä tahansa reaaliluku, joten funktio $h\colon \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ on jatkuva. Avaruus $\mathbb{R}$ on yhtenäinen, joten kuvajoukko $h\mathbb{R}$ on myös yhtenäinen. Näin joko $h\mathbb{R} = \{0\}$ tai $h\mathbb{R} = \{1\}$. Monikulmio J on rajoitettu, joten on olemassa sellainen kuula $B(\bar{0}, r)$, että $J \subset B(\bar{0}, r)$. Näin $h(r+1) = 0$, sillä korkeudella $r+1$ oleva x-akselin suuntainen suora ei leikkaa monikulmiota J kertaakaan. Siis $h\mathbb{R} = \{0\}$, eli monikulmion J ja jokaisen x-akselin suuntaisen suoran leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on parillinen. □

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on epäyhtenäinen:

Lause 2.8. *Jos $J \subset \mathbb{R}^2$ on monikulmio, niin $\mathbb{R}^2 \setminus J = X_0 \cup X_1$, missä joukot X_0 ja X_1 ovat avoimia, erillisiä ja epätyhjiä. Näin avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on ainakin kaksi komponenttia.*

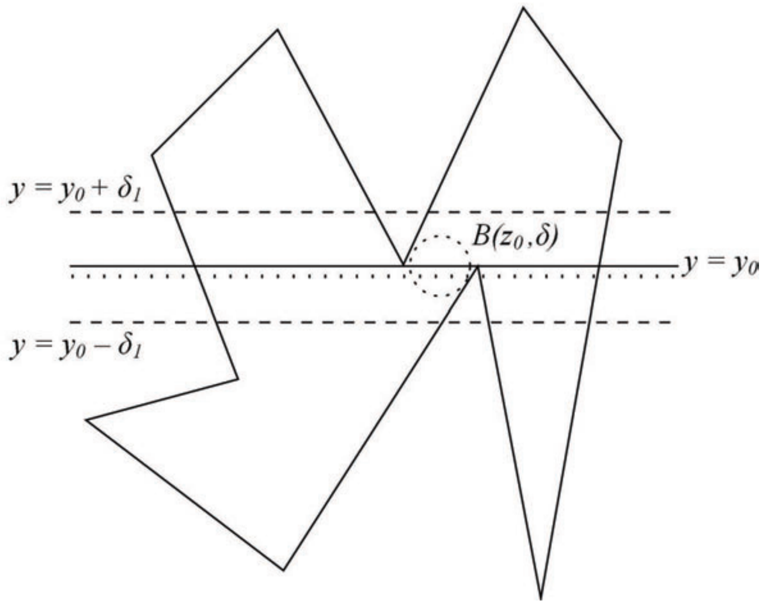
Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoon $z \in \mathbb{R}^2 \setminus J$. Tarkastellaan pisteen z kautta kulkevan x-akselin suuntaisen suoran ja monikulmion J niitä leikkauspisteitä, jotka ovat pisteen z vasemmalla puolella eivätkä ole erikoiskärkiä. Olkoon näiden leikkauspisteiden lukumäärä $k(z)$. Määritellään funktio $I\colon \mathbb{R}^2 \setminus J \to \{0, 1\}$ asettamalla

$$I(z) = \begin{cases} 0, & \text{jos } k(z) \equiv 0 \pmod 2 \\ 1, & \text{jos } k(z) \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

Olkoon $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus J$. Olkoon pisteen z_0 kautta kulkevan suoran $y = y_0$ ja monikulmion J leikkauspisteitä pisteen z_0 vasemmalla puolella yhteensä $m_1 + m_2 + k(z_0)$ kappaletta, missä m_1 on maksimikärkien lukumäärä ja m_2 on minimikärkien lukumäärä. Pisteen z_0 vasemmalla puolella olevien leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on siis $k(z_0)$. Osoitetaan, että funktio I on jatkuva pisteessä z_0. On siis löydettävä sellainen luku $\delta > 0$, että kun $z \in B(z_0, \delta)$, niin $I(z) = I(z_0)$.

Olkoon $E = \{v_i : pr_2(v_i) \neq y_0\}$ kuten edellä Lemmassa 2.7. Joukkoon E kuuluvat siis kaikki ne monikulmion J kärkipisteet v_i, jotka eivät kuulu pisteen z_0 kautta kulkevalle suoralle $y = y_0$. Olkoon $\delta_1 = \frac{1}{2} \min\{|pr_2(v_i) - y_0| : v_i \in E\}$. Joukko $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$, joten on olemassa sellainen luku $\delta_2 > 0$, että $B(z_0, \delta_2) \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$. Olkoon $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Olkoon $z = (x, y) \in B(z_0, \delta)$. Tällöin on kolme vaihtoehtoa: $y_0 - \delta < y < y_0$, $y = y_0$ tai $y_0 < y < y_0 + \delta$.

Oletetaan aluksi, että $y = y_0$. Tällöin pisteet z ja z_0 ovat samalla x-akselin suuntaisella suoralla. Sekä pisteen z_0 että pisteen z vasemmalla puolella olevat leikkauspisteet ovat kuulan $B(z_0, \delta)$ vasemmalla



KUVA 2

puolella, sillä $J \cap B(z_0, \delta) = \emptyset$. Näin myös pisteen z vasemmalla puolella olevien leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on $k(z_0)$.

Oletetaan nyt, että $y_0 - \delta < y < y_0$ (Kuva 2). Tarkastellaan pisteen z kautta kulkevaa x-akselin suuntaista suoraa. Luku δ_1 on valittu niin, että joukossa $\mathbb{R}^2 \times]y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1[$ ei ole yhtään monikulmion kärkipistettä. Edelleen $J \cap B(z_0, \delta) = \emptyset$, joten sekä pisteen z_0 että pisteen z vasemmalla puolella olevat leikkauspisteet ovat kuulan $B(z_0, \delta)$ vasemmalla puolella. Näin pisteen z kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora leikkaa pisteen z vasemmalla puolella samat $k(z_0)$ sivua kuin suora $y = y_0$, ja lisäksi jokaista suoralla $y = y_0$ pisteen z_0 olevaa maksimikärkeä kohti kaksi monikulmion sivua. Siis leikkauspisteiden kokonaismäärä on $k(z_0) + 2m_1$, eikä yksikään niistä ole kärkipiste.

Jos $y_0 < y < y_0 + \delta$, niin samaan tapaan voidaan päätellä, että pisteen z kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora leikkaa monikulmiota J pisteen z vasemmalla puolella yhteensä $k(z_0) + 2m_2$ pisteessä, joista yksikään ei ole kärkipiste. Joka tapauksessa pisteen z vasemmalla puolella olevien leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on siis $k(z) = k(z_0) + 2m$, missä $m \in \{0, m_1, m_2\}$. Näin $k(z) \equiv k(z_0) \pmod 2$, joten $I(z) = I(z_0)$. Funktio I on siis jatkuva pisteessä z_0. Piste z_0 saattoi olla mikä tahansa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ piste, joten funktio I on jatkuva.

Olkoon L_j jokin monikulmion J sivu, olkoon z sivun L_j keskipiste ja olkoon s pisteen z kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora. Joukko $K = \cup\{L_i : i \in \mathbb{Z}_n, i \neq j\}$ on suljettu ja $z \notin K$, joten $d(z, K) >$

0. Olkoon $\delta = d(z, K)/2$. Tällöin $B(z, \delta) \cap J \subset L_j$. Valitaan kaksi pistettä joukosta $s \cap B(z, \delta)$ pisteen z eri puolilta. Suora s leikkaa sivun L_j vain pisteessä z, sillä alussa tehdyn oletuksen nojalla sivu L_j ei ole x-akselin suuntainen. Näin $s \cap B(z, \delta) \cap J = \{z\}$, joten valitut kaksi pistettä kuuluvat joukkoon $\mathbb{R}^2 \setminus J$, ja toisen pisteen vasemmalla puolella on yksi leikkauspiste enemmän kuin toisen pisteen vasemmalla puolella. Funktio I saa siis toisessa pisteessä arvon 0 ja toisessa arvon 1, joten funktio $I \colon \mathbb{R}^2 \setminus J \to \{0, 1\}$ on jatkuva surjektio. Näin joukot $X_0 = I^{-1}\{0\}$ ja $X_1 = I^{-1}\{1\}$ ovat avoimia, erillisiä ja epätyhjiä, ja $\mathbb{R}^2 \setminus J = X_0 \cup X_1$. Avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on siis epäyhtenäinen, eli sillä on vähintään kaksi komponenttia. □

Näin on osoitettu, että avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on erillinen yhdiste avoimista ja epätyhjistä joukoista X_0 ja X_1. Seuraavassa lauseessa jatketaan joukkojen X_0 ja X_1 tarkastelemista. Sen todistuksessa nojaudutaan Lemmaan 2.7.

Lause 2.9. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoot joukot $X_0 = I^{-1}\{0\}$ ja $X_1 = I^{-1}\{1\}$ kuten edellä Lauseessa 2.8. Tällöin joukko X_0 on rajoittamaton ja joukko X_1 on rajoitettu. Lisäksi monikulmio J on sekä joukon X_0 että joukon X_1 reuna.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Lauseen 2.8 perusteella tiedetään, että $\mathbb{R}^2 \setminus J = X_0 \cup X_1$, missä joukot X_0 ja X_1 ovat avoimia, erillisiä ja epätyhjiä. Osoitetaan aluksi, että joukko X_0 on rajoittamaton ja joukko X_1 on rajoitettu: Monikulmio J on rajoitettu, joten on olemassa sellainen kuula $B(\bar{0}, r)$, että $J \subset B(\bar{0}, r)$. Olkoon $z \in \mathbb{R}^2 \setminus B(\bar{0}, r)$. Tarkastellaan pisteen z kautta kulkevaa x-akselin suuntaista suoraa. On kaksi mahdollisuutta: joko tämä suora ei pisteen z vasemmalla puolella leikkaa monikulmiota kertaakaan tai kaikki tämän suoran ja monikulmion leikkauspisteet sijaitsevat pisteen z vasemmalla puolella. Ensimmäisessä tapauksessa funktion I määritelmän mukaan $I(z) = 0$. Lemman 2.7 nojalla tiedetään, että monikulmion J ja jokaisen x-akselin suuntaisen suoran leikkauspisteiden lukumäärä erikoiskärkiä lukuunottamatta on parillinen, joten myös toisessa tapauksessa $I(z) = 0$. Näin $z \in X_0 = I^{-1}\{0\}$. Siten $\mathbb{R}^2 \setminus B(\bar{0}, r) \subset X_0$ ja $X_1 \subset B(\bar{0}, r)$. Siis X_0 on rajoittamaton ja X_1 on rajoitettu. Osoitetaan vielä, että J on sekä joukon X_0 että joukon X_1 reuna:

Olkoon $z \in J$. Oletetaan aluksi, että piste z ei ole erikoiskärki. Tarkastellaan pisteen z kautta kulkevaa x-akselin suuntaista suoraa. Jokainen pisteen z kuulaympäristö $B(z, r)$ sisältää tämän suoran pisteitä sekä pisteen z vasemmalta että oikealta puolelta, jolloin toiset niistä kuuluvat joukkoon X_0 ja toiset joukkoon X_1. Näin z on sekä joukon X_0 että joukon X_1 reunapiste. Oletetaan sitten, että piste z on erikoiskärki. Olkoon $B(z, r)$ jokin pisteen z kuulaympäristö. Se sisältää monikulmion J pisteitä, jotka eivät ole erikoiskärkiä. Olkoon $w \in B(z, r) \cap J$ jokin tällainen piste. Tällöin on olemassa pisteen w kuulaympäristö

$B(w,r') \subset B(z,r)$. Pisteen w tiedetään olevan sekä joukon X_0 että joukon X_1 reunapiste, joten kuula $B(w,r')$ ja siten myös kuula $B(z,r)$ kohtaa sekä joukon X_0 että joukon X_1. Kuula $B(z,r)$ saattoi olla mikä tahansa pisteen z kuulaympäristö, joten pisteen z jokainen kuulaympäristö kohtaa sekä joukon X_0 että joukon X_1. Siis z on sekä joukon X_0 että joukon X_1 reunapiste. Näin $J \subset \partial X_0$ ja $J \subset \partial X_1$.

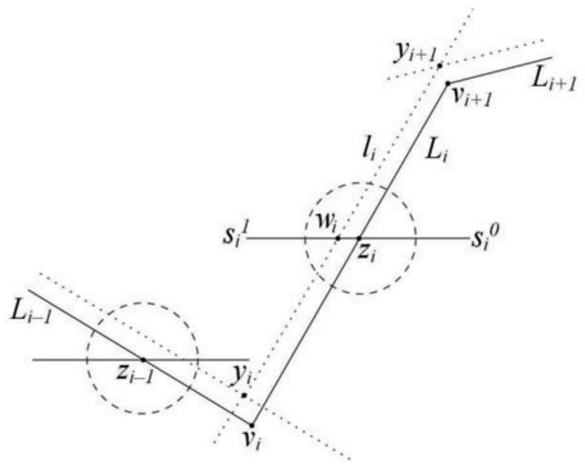
Olkoon sitten $z \in \partial X_0$. Joukko X_0 on avoin, joten $z \notin X_0$. Oletetaan, että $z \in X_1$. Tällöin on olemassa pisteen z kuulaympäristö $B(z,\varepsilon) \subset X_1$, sillä myös joukko X_1 on avoin. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletuksen mukaan $z \in \partial X_0$ ja näin pisteen z jokainen ympäristö kohtaa joukon X_0. Siis $z \notin X_1$. Näin $z \notin X_0 \cup X_1 = \mathbb{R}^2 \setminus J$, joten $z \in J$. Siis $\partial X_0 \subset J$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $\partial X_1 \subset J$. □

Lauseessa 2.11 osoitetaan, että joukot X_0 ja X_1 ovat murtoviivayhtenäisiä. Apuna käytetään monikulmioita $J_0 \subset X_0$ ja $J_1 \subset X_1$, joiden etäisyys monikulmiosta J voidaan valita miten pieneksi tahansa. Näiden monikulmioiden olemassaolo todistetaan seuraavassa lauseessa.

Lause 2.10. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoot joukot X_0 ja X_1 kuten edellä Lauseissa 2.8 ja 2.9. Tällöin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellaiset monikulmiot J_0 ja J_1, että $J_j \subset X_j$ ja $d(x,J) < \varepsilon$ jokaisella $x \in J_j$, kun $j \in \{0,1\}$.*

Todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoot $L_0, \ldots, L_{n-1}$ monikulmion J sivut ja olkoot $v_0 \ldots, v_{n-1}$ sen kärjet. Jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$ olkoon K_i yhdiste monikulmion J sivuista lukuunottamatta sivuja L_{i-1}, L_i ja L_{i+1}. Esimerkiksi $K_0 = \cup_{i=2}^{n-2} L_i$. Sekä sivut L_i että joukot K_i ovat tason suljettuina ja rajoitettuina osajoukkoina kompakteja. Lisäksi $L_i \cap K_i = \emptyset$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$, joten $d(L_i, K_i) > 0$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Merkitään $d_i = d(L_i, K_i)$ ja $\delta_i = |v_i - v_{i+1}|$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Olkoon $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}\min\{d_i, \delta_i : i \in \mathbb{Z}_n\}$. Voidaan olettaa, että $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Muodostetaan monikulmio J_1:

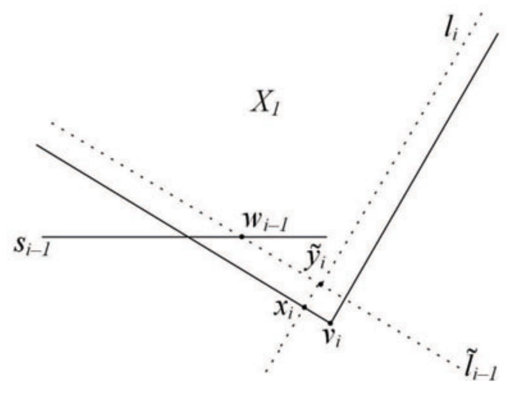
Olkoon $i \in \mathbb{Z}_n$. Tarkastellaan monikulmion J sivua L_i (Kuva 3). Olkoon sen keskipiste z_i ja olkoon sen kautta kulkeva x-akselin suuntainen suora s_i. Piste z_i jakaa suoran s_i kahdeksi puolisuoraksi, olkoot ne s_i^0 ja s_i^1. Leikkaus $B(z_i,\varepsilon) \cap s_i \cap J = \{z_i\}$, joten voidaan olettaa, että $s_i^0 \cap B(z_i,\varepsilon) \subset X_0$ ja $s_i^1 \cap B(z_i,\varepsilon) \subset X_1$. Olkoon $w_i \in s_i \cap B(z_i,\varepsilon) \cap X_1$. Olkoon l_i pisteen w_i kautta kulkeva sivun L_i suuntainen suora. Vastaava suora voidaan siis muodostaa jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Monikulmion J vierekkäiset sivut ovat erisuuntaisia, joten suorat l_{i-1} ja l_i ovat erisuuntaisia jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Olkoon suorien l_{i-1} ja l_i leikkauspiste y_i jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Monikulmiolla J on n kappaletta kärkiä, joten pisteet w_i voidaan valita niin läheltä sivuja L_i, että $y_i \in B(v_i,\varepsilon)$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Olkoon $A_i = [y_i, y_{i+1}]$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Olkoon $J_1 = \cup_{i=0}^{n-1} A_i$. Tällöin jos $x \in J_1$, niin $x \in A_i$ jollain $i \in \mathbb{Z}_n$ ja $d(x, L_i) \leq \max\{d(y_i, L_i), d(y_{i+1}, L_i)\} < \varepsilon$. Siis $d(x,J) < \varepsilon$ kaikilla $x \in J_1$.



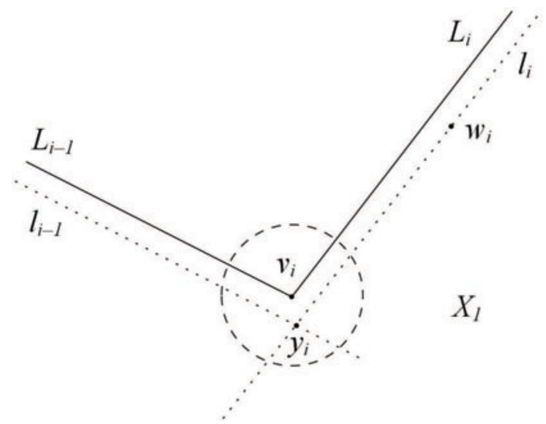
KUVA 3

Osoitetaan seuraavaksi, että $A_i \subset X_1$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$: Olkoon $i \in \mathbb{Z}_n$. Piste w_i jakaa suoran l_i kahdeksi puolisuoraksi l_i^1 ja l_i^2. Joukko X_1 on rajoitettu, joten kumpikin näistä puolisuorista kohtaa joukon $X_0 \subset \complement X_1$ ja siten myös reunan $\partial X_1 = J$. Leikkausjoukot $l_i^1 \cap J$ ja $l_i^2 \cap J$ ovat suljettuja ja rajoitettuja, joten ne ovat tason $\mathbb{R}^2$ osajoukkoina kompakteja. Olkoot $x_1 \in l_i^1 \cap J$ ja $x_2 \in l_i^2 \cap J$ pisteet, joka on lähinnä pistettä w_i. Tällöin $]x_1, x_2[\subset X_1$. Tarkastellaan seuraavaksi kaksi tapausta: toisessa monikulmion J kärki v_i on terävä, toisessa tylppä.

Oletetaan aluksi, että kärki v_i on terävä (Kuva 4). Tällöin suora l_i leikkaa sivun L_{i-1}. Tämä leikkauspiste on joko piste x_1 tai x_2, joten voidaan olettaa, että se on x_1. Suorien l_i ja l_{i-1} leikkauspiste y_i on tällöin pisteen x_1 jommallakummalla puolella; joko $y_i \in]x_1, w_i[$ tai $x_1 \in]y_i, w_i[$. Osoitetaan, että välttämättä $y_i \in]x_1, w_i[$: Tarkastellaan suoraa l_{i-1} ja sen peilikuvaa sivun L_{i-1} suhteen. Olkoon $\tilde{l}_{i-1}$ näistä suorista se, jolle pätee, että suorien l_i ja $\tilde{l}_{i-1}$ leikkauspiste $\tilde{y}_i \in]x_1, w_i[$. Tällöin $\tilde{y}_i \in$



KUVA 4



KUVA 5

X_1. Toinen pisteestä $\tilde{y}_i$ lähtevistä suoran $\tilde{l}_{i-1}$ suuntaisista puolisuorista leikkaa suoran s_{i-1} ennen kuin se leikkaa monikulmion J, joten myös tämä leikkauspiste kuuluu joukkoon X_1. Näin sen täytyy olla piste w_{i-1}. Siis $l_{i-1} = \tilde{l}_{i-1}$ ja $y_i = \tilde{y}_i \in]x_1, w_i[$.

Oletetaan sitten, että kärki v_i on tylppä (Kuva 5). Tällöin suora l_i ei leikkaa sivua L_{i-1} lainkaan mutta leikkaa kuitenkin suoran l_{i-1} pisteessä $y_i \neq w_i$. Pisteiden w_i ja y_i välillä suora l_i sisältyy joukkoon X_1, joten $y_i \in]x_1, w_i[$. Vastaava tarkastelu voidaan tehdä myös kärjelle v_{i+1}, jolloin todetaan, että $y_{i+1} \in]w_i, x_2[$. Siis $A_i = [y_i, y_{i+1}] \subset]x_1, x_2[\subset X_1$. Tämä pätee jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$, joten $J_1 \subset X_1$.

Osoitetaan vielä, että J_1 todella on monikulmio: Suorat l_{i-1} ja l_i ovat erisuuntaisia jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Näin janat A_{i-1} ja A_i leikkaavat toisensa vain yhteisissä päätepisteissään y_i jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Olkoon $i \in \mathbb{Z}_n$. Oletetaan, että janat A_i ja A_j eivät ole vierekkäiset eli $i \neq j \neq i \pm 1$, mutta leikkavat toisensa pisteessä x. Tällöin $d(x, L_i) < \varepsilon$, ja koska $L_j \subset K_i$, niin $d(x, K_i) \leq d(x, L_j) < \varepsilon$. Joukot L_i ja K_i ovat kompakteja, joten on olemassa sellaiset pisteet $z_L \in L_i$ ja $z_K \in K_i$, että $|x - z_L| = d(x, L_i)$ ja $|x - z_K| = d(x, K_i)$. Edelleen $d_i = d(L_i, K_i) \leq |z_L - z_K| \leq |z_L - x| + |x - z_K| = d(x, L_i) + d(x, K_i) < 2\varepsilon \leq 2\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\min\{d_i, \delta_i : i \in \mathbb{Z}_n\} \leq \frac{1}{2}d_i$. Tämä on ristiriita. Näin $A_i \cap A_j = \emptyset$ aina jos $i \neq j \neq i \pm 1$. Joukko $J_1 = \cup_{i=1}^n A_i$ on siis todella monikulmio.

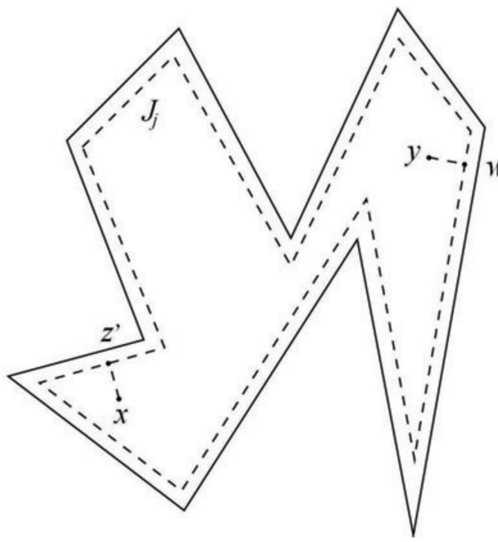
Monikulmio J_0 muodostetaan ja sen ominaisuudet todistetaan vastaavalla tavalla. Kun osoitetaan, että jana $A_i \subset X_0$ jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$, on kuitenkin huomattava, että suora l_i saattaa kokonaisuudessaan sisältyä joukkoon X_0 eikä kohtaa lainkaan monikulmiota J. Tällöin myös vastaava jana $A_i \subset X_0$. Jos taas $l_i \cap J \neq \emptyset$, niin menetellään kuten monikulmion J_1 tapauksessa. □

Seuraavassa lauseessa kootaan tämän luvun tulokset yhteen ja todistetaan erityistapaus Jordanin käyrälauseesta.

Lause 2.11 (Jordanin käyrälause tason monikulmioille)**.** *Jos* $J \subset \mathbb{R}^2$ *on monikulmio, niin avaruudella* $\mathbb{R}^2 \setminus J$ *on kaksi komponenttia, joiden yhteinen reuna on* J*. Toinen komponenteista on rajoitettu ja toinen on rajoittamaton.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Lauseen 2.8 perusteella tiedetään, että $\mathbb{R}^2 \setminus J = X_0 \cup X_1$, missä joukot X_0 ja X_1 ovat avoimia, erillisiä ja epätyhjiä. Lauseen 2.9 perusteella joukko X_0 on rajoittamaton, joukko X_1 on rajoitettu ja monikulmio J on niiden molempien reuna.

Olkoon $j \in \{0, 1\}$. Osoitetaan, että joukko X_j on murtoviivayhtenäinen: Olkoot x, $y \in X_j$. Joukot J ja $\{x, y\}$ ovat tason $\mathbb{R}^2$ suljettuina ja rajoitettuina joukkoina kompakteja, joten $d(J, \{x, y\}) > 0$. Olkoon $\varepsilon = \frac{1}{2} d(J, \{x, y\})$. Lauseen 2.10 perusteella on olemassa sellainen monikulmio J_j, että $J_j \subset X_j$ ja $d(x, J) < \varepsilon$ jokaisella $x \in J_j$. (Kuva 6). Joukko J on kompakti, joten on olemassa sellaiset pisteet z ja $w \in J$,

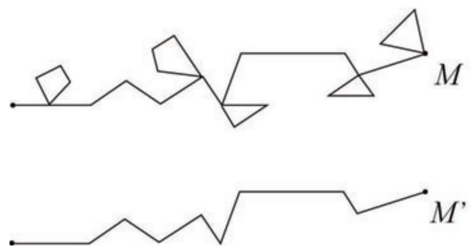


Kuva 6

että $d(x, J) = |x - z|$ ja $d(y, J) = |y - w|$. Janat $[x, z]$ ja $[y, w]$ sisältyvät toisia päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X_j ja kohtaavat monikulmion J_j. Olkoon $z' \in]x, z[\cap J_j$ se piste, joka on lähinnä pistettä x, ja olkoon $w' \in]y, w[\cap J_j$ se piste, joka on lähinnä pistettä y. Tällöin $[x, z']$, $[y, w'] \subset X_j$. Olkoon $M \subset J_j$ pisteet z' ja w' yhdistävä murtoviiva. Pisteet x ja y yhdistävä joukon X_j murtoviiva on tällöin $[x, z'] \cup M \cup [w', y]$. Pisteet x ja y saattoivat olla mitkä tahansa joukon X_j pisteet, joten joukko X_j on murtoviivayhtenäinen ja siten yhtenäinen. Indeksi j saattoi olla 0 tai 1, joten molemmat joukot X_0 ja X_1 ovat yhtenäisiä. Avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on näin kaksi komponenttia, X_0 ja X_1, joista X_0 on rajoittamaton ja X_1 rajoitettu, ja monikulmio J on niiden molempien reuna. $\square$

3. Jordanin kaarilause

Tässä luvussa, joka pohjautuu kirjaan [3], todistetaan Jordanin kaarilause. Sen mukaan joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen, jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on kaari. Aluksi jatketaan kuitenkin tason monikulmioiden tarkastelua. Tässä luvussa $J \subset \mathbb{R}^2$ on tason monikulmio ja joukot X_0 ja X_1 ovat avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentit, joista X_1 on rajoitettu. Seuraavassa lemmassa ja sitä seuraavassa lauseessa tarkastellaan murtoviivaa $M \subset \bar{X}_1$. Tämä murtoviiva voi leikata itseään eli sisältää yhden tai useamman monikulmion (Kuva 7). Murtoviiva koostuu kuitenkin äärellisen monesta janas-



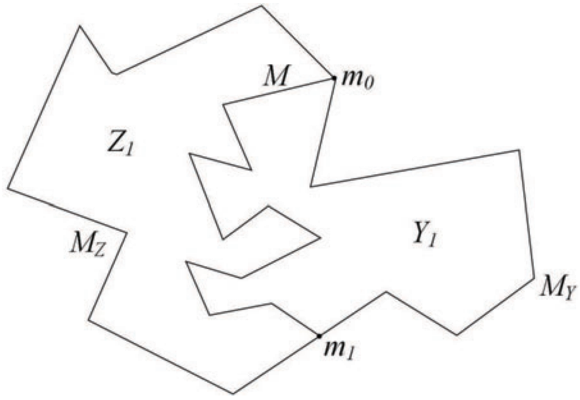
Kuva 7

ta, joten näitä monikulmioita on äärellinen määrä. Näin voidaan aina muodostaa alkuperäisen murtoviivan päätepisteet yhdistävä murtoviiva $M' \subset M$, joka on kaari eli homeomorfinen välin $I = [0, 1]$ kanssa. Voidaan siis jatkossa olettaa, että murtoviiva M on kaari.

Lemma 3.1. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoon $M \subset \mathbb{R}^2$ sellainen murtoviiva, että $M \subset \bar{X}_1$ ja $M \cap J = \{m_0, m_1\}$, missä pisteet m_0 ja m_1 ovat murtoviivan M päätepisteet ($m_0 \neq m_1$). Tällöin joukolla $X_1 \setminus M$ on ainakin kaksi komponenttia.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Joukolla $J \setminus \{m_0, m_1\}$ on kaksi komponenttia. Olkoot ne M_Y ja M_Z. Siis $J \setminus \{m_0, m_1\} = M_Y \cup M_Z$, missä joukot M_Y ja M_Z ovat erillisiä, epätyhjiä ja avoimia joukossa J. Edellä todetun nojalla voidaan olettaa, että murtoviiva M on kaari, jolloin yhdisteet $M \cup M_Y$ ja $M \cup M_Z$ ovat monikulmioita. Joukoilla $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$ ja $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Z)$ on siis Lauseen 2.11 nojalla kummallakin kaksi komponenttia. Olkoon joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$ rajoittamaton komponentti Y_0 ja rajoitettu komponentti Y_1, ja vastaavasti joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Z)$ rajoittamaton komponentti Z_0 ja rajoitettu komponentti Z_1 (Kuva 8).

Tarkastellaan joukkoja X_0, X_1, Y_0 ja Y_1. Olkoon $x \in X_0$. Tällöin $x \notin J \cup M$, joten $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$. Näin siis $X_0 \subset \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$. Joukko X_0 on yhtenäinen ja rajaton, joten sen täytyy sisältyä joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$ rajattomaan komponenttiin Y_0. Tästä seuraa, että $Y_1 \cap X_0 = \emptyset$. Oletetaan, että $Y_1 \cap J \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa piste $y \in Y_1 \cap J$ ja sellainen luku $\varepsilon > 0$, että $B(y, \varepsilon) \subset Y_1$. Toisaalta monikulmio J on



KUVA 8

joukon X_0 reuna, joten $B(y,\varepsilon) \cap X_0 \neq \emptyset$. Näin $Y_1 \cap X_0 \neq \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis myös $Y_1 \cap J = \emptyset$ ja näin $Y_1 \subset X_1$. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että $X_0 \subset Z_0$ ja $Z_1 \subset X_1$.

Osoitetaan, että $Y_1 \cap Z_1 = \emptyset$: Olkoon $x \in Z_1$. Tällöin edellä todetun nojalla $x \in X_1$ ja lisäksi $x \notin M$, joten $x \notin J \cup M$. Näin $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$. Siis $Z_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$. Yhtenäisenä joukkona Z_1 sisältyy siis komponenttiin Y_0 tai Y_1. Oletetaan, että $Z_1 \subset Y_1$. Tällöin $\bar{Z}_1 \subset \bar{Y}_1$. Olkoon $x \in M_Z \subset \bar{Z}_1$. Tällöin $x \notin M \cup M_Y$, joten $x \in Y_1$ tai $x \in Y_0$. Toisaalta $x \notin X_1$ ja $Y_1 \subset X_1$, joten $x \in Y_0$. Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan $x \in \bar{Z}_1 \subset \bar{Y}_1$. Siis välttämättä $Z_1 \subset Y_0$ ja $Y_1 \cap Z_1 = \emptyset$.

Osoitetaan, että $X_1 \setminus M \subset Y_1 \cup (Y_0 \cap X_1)$. Olkoon $x \in X_1 \setminus M$. Jos $x \in Y_1$, niin asia on selvä. Oletetaan, että $x \notin Y_1$. Koska $x \in X_1 \setminus M$, niin $x \notin J \cup M$. Välttämättä tällöin $x \in Y_0$. Siis $x \in Y_0 \cap X_1$ eli $x \in Y_1 \cup (Y_0 \cap X_1)$. Toisaalta $Y_1 \subset X_1 \setminus M$ ja $Y_0 \cap X_1 \subset X_1 \setminus M$, joten $X_1 \setminus M = Y_1 \cup (Y_0 \cap X_1)$. Joukko Y_1 on avoin ja epätyhjä. Myös joukko $Y_0 \cap X_1$ on avoin kahden avoimen joukon leikkauksena ja epätyhjä, sillä $Z_1 \subset Y_0 \cap X_1$. Leikkaus $Y_1 \cap Y_0 = \emptyset$, joten myös $Y_1 \cap (Y_0 \cap X_0) = \emptyset$. Siis joukko $X_1 \setminus M$ on lausuttavissa kahden avoimen, erillisen ja epätyhjän joukon yhdisteenä, joten se on epäyhtenäinen. Joukko Y_1 on yhtenäinen, joten yhtälön $X_1 \setminus M = Y_1 \cup (Y_0 \cap X_1)$ nojalla se on eräs joukon $X_1 \setminus M$ komponentti. Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että $X_1 \setminus M = Z_1 \cup (Z_0 \cap X_1)$, missä joukot Z_1 ja $Z_0 \cap X_1$ ovat epätyhjiä, erillisiä ja avoimia. Joukko Z_1 on yhtenäinen, joten sen täytyy olla eräs joukon $X_1 \setminus M$ komponentti. Lisäksi tiedetään, että $Y_1 \cap Z_1 = \emptyset$, joten joukon $X_1 \setminus M$ eri komponentteja ovat ainakin Z_1 ja Y_1. □

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että edellisen lemman tilanteessa joukolla $X_1 \setminus M$ on täsmälleen kaksi komponenttia:

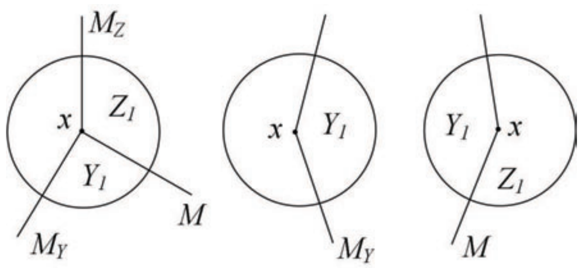
Lause 3.2. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoon $M \subset \mathbb{R}^2$ sellainen murtoviiva, että $M \subset \bar{X}_1$ ja $M \cap J = \{m_0, m_1\}$, missä pisteet m_0 ja m_1 ovat murtoviivan M päätepisteet ($m_0 \neq m_1$). Tällöin joukolla*

$X_1 \setminus M$ on täsmälleen kaksi komponenttia. Oletetaan lisäksi, että pisteet y, $z \in J$ kuuluvat joukon $J \setminus \{m_0, m_1\}$ eri komponentteihin. Tällöin joukon $X_1 \setminus M$ kummankaan komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä y että pistettä z.

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoot joukon $J \setminus \{m_0, m_1\}$ komponentit M_Y ja M_Z. Siis $J \setminus \{m_0, m_1\} = M_Y \cup M_Z$, missä joukot M_Y ja M_Z ovat erillisiä, epätyhjiä ja avoimia joukossa J. Voidaan edelleen olettaa, että murtoviiva M on kaari, jolloin yhdisteet $M \cup M_Y$ ja $M \cup M_Z$ ovat monikulmioita. Lemman 3.1 mukaan joukolla $X_1 \setminus M$ on ainakin kaksi komponenttia, joista toinen on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Y)$ rajoitettu komponentti Y_1 ja toinen on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (M \cup M_Z)$ rajoitettu komponentti Z_1.

Osoitetaan seuraavaksi, että joukolla $X_1 \setminus M$ ei ole muita komponentteja. Tehdään vastaoletus, että sillä on kolmas komponentti U. Komponentti $U \subset X_1$, joten $\bar{U} \subset \bar{X}_1$. Olkoon $x \in X_1 \setminus M$. Osoitetaan, että $x \notin \partial U$. Tehdään vastaoletus, että $x \in \partial U$. Tällöin sen jokainen ympäristö kohtaa sekä komponentin U että sen komplementin. Olkoon $C(x)$ se joukon $X_1 \setminus M$ komponentti, joka sisältää pisteen x. Joukko $X_1 \setminus M$ on avoin joukko avaruudessa $\mathbb{R}^2$, joten sen komponentit ovat avoimia. Pisteellä x on siis ympäristö $B(x, \varepsilon) \subset C(x)$. Tämä on ristiriita. Vastaoletus on siis väärä, ja $x \notin \partial U$. Siis $\partial U \subset M \cup \partial X_1 = M \cup J$.

Olkoon $x \in M \cup J$. Osoitetaan, että tällöin on olemassa pisteen x ympäristö $B(x, \varepsilon)$, joka ei kohtaa komponenttia U. Tarkastellaan kolme tapausta: (1) $x \in \{m_0, m_1\}$, (2) $x \in M_Y$ tai $x \in M_Z$ ja (3) $x \in M \setminus \{m_0, m_1\}$. Oletetaan aluksi, että $x \in \{m_0, m_1\}$. Joukko M on välin $[0, 1]$ kanssa homeomorfinen murtoviiva ja joukko J on monikulmio, joten on olemassa sellainen pisteen x ympäristö $B(x, \varepsilon)$, että joukko $B(x, \varepsilon) \cap X_1$ koostuu kahdesta ympyräsektorista (Kuva 9). Nämä sektorit ovat yhtenäisiä, joten kumpikin niistä sisältyy johonkin joukon $X_1 \setminus M$ komponenttiin. Piste $x \in M$ on komponenttien Y_1 ja Z_1 reunapiste, joten toinen sektoreista sisältyy komponenttiin Y_1 ja toinen komponenttiin Z_1. Näin $B(x, \varepsilon) \cap U = \emptyset$.



Kuva 9

Oletetaan, että $x \in M_Y$. Joukko J on monikulmio ja pisteen $x \notin M$ etäisyys kompaktista joukosta M on positiivinen, joten on olemassa sellainen pisteen x ympäristö $B(x, \varepsilon)$, että joukko $B(x, \varepsilon) \cap X_1$ on ympyräsektori (Kuva 9). Se on yhtenäinen, joten se sisältyy johonkin joukon $X_1 \setminus M$ komponenttiin. Piste $x \in M_Y$ on komponentin Y_1 reunapiste, joten sektorin täytyy sisältyä komponenttiin Y_1. Näin $B(x, \varepsilon) \cap U = \emptyset$. Tapaus $x \in M_Z$ voidaan käsitellä vastaavasti.

Oletetaan, että $x \in M \setminus \{m_0, m_1\}$. Joukko X_1 on avoin ja murtoviiva M on homeomorfinen välin $[0, 1]$ kanssa, joten on olemassa sellainen pisteen x ympäristö $B(x, \varepsilon)$, että joukko $B(x, \varepsilon) \cap X_1$ koostuu kahdesta ympyräsektorista (Kuva 9). Nämä sektorit ovat yhtenäisiä, joten kumpikin niistä sisältyy johonkin joukon $X_1 \setminus M$ komponenttiin. Piste $x \in M \setminus \{m_0, m_1\}$ on komponenttien Y_1 ja Z_1 reunapiste, joten toinen sektoreista sisältyy komponenttiin Y_1 ja toinen komponenttiin Z_1. Näin $B(x, \varepsilon) \cap U = \emptyset$.

Olkoon $x \in \partial U$. Tällöin pisteen x jokainen ympäristö kohtaa joukon U. Toisaalta edellä on osoitettu, että $\partial U \subset M \cup J$ ja että jokaisella joukon $M \cup J$ pisteellä on ympäristö, joka ei kohtaa komponenttia U. Tämä on ristiriita. Siis vastaoletus on väärä. Näin joukolla $X_1 \setminus M$ on täsmälleen kaksi komponenttia, Y_1 ja Z_1.

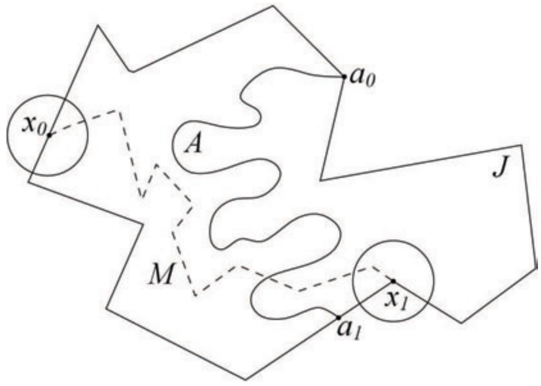
Olkoot y, $z \in J \setminus \{m_0, m_1\}$ sellaiset pisteet, että ne kuuluvat joukon $J \setminus \{m_0, m_1\}$ eri komponentteihin. Voidaan olettaa, että $y \in M_Y$ ja $z \in M_Z$. Komponentin Y_1 reuna $\partial Y_1 = M \cup M_Y$ ja komponentin Z_1 reuna $\partial Z_1 = M \cup M_Z$. Näin joukon $X_1 \setminus M$ kummankaan komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä y että pistettä z. □

Siirrytään tarkastelemaan murtoviivan sijaan kaarta $A \subset \mathbb{R}^2$ ja osoitetaan, että myös joukolla $X_1 \setminus A$ on ainakin kaksi komponenttia. Tähän lauseeseen nojaudutaan jatkossa useasti.

Lause 3.3. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ sellainen kaari, että $A \subset \bar{X}_1$ ja $A \cap J = \{a_0, a_1\}$, missä pisteet a_0 ja a_1 ovat kaaren A päätepisteet ($a_0 \neq a_1$). Oletetaan, että pisteet x_0, $x_1 \in J$ kuuluvat joukon $J \setminus \{a_0, a_1\}$ eri komponentteihin. Tällöin joukon $X_1 \setminus A$ minkään komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä x_0 että pistettä x_1. Joukolla $X_1 \setminus A$ on siis ainakin kaksi komponenttia*

Todistus: Olkoot x_0, $x_1 \in J$ sellaiset pisteet, että ne kuuluvat joukon $J \setminus \{a_0, a_1\}$ eri komponentteihin. Tehdään vastaoletus, että pisteet x_0, x_1 kuuluvat joukon $X_1 \setminus A$ saman komponentin reunaan. Olkoon tämä komponentti U. Joukko $X_1 \setminus A$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$, joten sen komponentit ovat avoimia, erityisesti komponentti U on avoin.

Joukko J on monikulmio, joten on olemassa sellainen luku $\delta_1 > 0$, että leikkaukset $B(x_0, \delta_1) \cap J$ ja $B(x_1, \delta_1) \cap J$ muodostuvat joko yhdestä janasta tai kahdesta janasta, joiden yhteinen päätepiste on kuulan keskipiste. Toisaalta kaari A on suljettu ja x_0, $x_1 \notin A$, joten etäisyys



KUVA 10

$d(x_i, A) > 0$, $i \in \{0,1\}$. Olkoon $\delta_2 = \frac{1}{2}\min\{d(x_0, A), d(x_1, A)\}$. Olkoon $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tällöin leikkausjoukot $B(x_0, \delta) \cap X_1$ ja $B(x_1, \delta) \cap X_1$ muodostuvat kumpikin yhdestä ympyräsektorista. Koska pisteet x_0, x_1 kuuluvat komponentin U reunaan, kyseiset ympyräsektorit kohtaavat komponentin U. Yhtenäisinä joukkoina niiden täytyy näin sisältyä komponenttiin U. Valitaan pisteet $y_0 \in B(x_0, \delta) \cap X_1$ ja $y_1 \in B(x_1, \delta) \cap X_1$. Tällöin $y_0, y_1 \in U$.

Komponentti U on avoimena ja yhtenäisenä avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukkona murtoviivayhtenäinen, mikä on osoitettu kirjassa [6], Lause 14.30. Näin on olemassa pisteet y_0 ja y_1 yhdistävä murtoviiva $M_0 \subset U$ (Kuva 10). Jana $[x_i, y_i]$ sisältyy pistettä $x_i \in J$ lukuunottamatta joukkoon $B(x_i, \delta) \cap X_1 \subset U$, $i \in \{0, 1\}$. Olkoon $M = [x_0, y_0] \cup M_0 \cup [y_1, x_1]$. Tällöin joukko $M \subset \bar{U}$ on pisteet x_0 ja x_1 yhdistävä murtoviiva, joka sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon U ja $M \cap J = \{x_0, x_1\}$. Leikkaus $M \cap A = \emptyset$, sillä $M \setminus \{x_0, x_1\} \subset U \subset X_1 \setminus A$. Yhtenäinen joukko $A \setminus \{a_0, a_1\}$ sisältyy näin joukkoon $X_1 \setminus M$, joten se sisältyy joukon $X_1 \setminus M$ johonkin komponenttiin. Pisteet a_0 ja a_1 kuuluvat siis tämän komponentin reunaan.

Toisaalta Lauseen 3.2 nojalla tiedetään, että joukolla $X_1 \setminus M$ on kaksi komponenttia. Murtoviivan M päätepisteet x_0 ja x_1 valittiin niin, että joukon $X_1 \setminus M$ kummankaan komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä a_0 että pistettä a_1. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. Siis pisteet x_0 ja x_1 kuuluvat joukon $X_1 \setminus A$ eri komponenttien reunoihin, ja joukolla $X_1 \setminus A$ on näin ainakin kaksi komponenttia. □

Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että kaksi monikulmion pistettä voidaan aina yhdistää toisiinsa murtoviivalla, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy monikulmion sisäpuolelle.

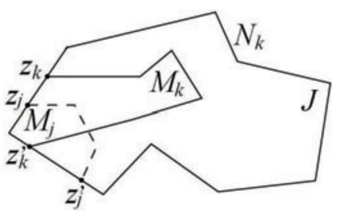
Lemma 3.4. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoot x_0, $x_1 \in J$, $x_0 \neq x_1$. Tällöin on olemassa sellainen pisteet x_0 ja x_1 yhdistävä murtoviiva $M \subset \bar{X}_1$, että $M \cap J = \{x_0, x_1\}$.*

Todistus: Joukko J on monikulmio, joten on olemassa sellainen luku $\varepsilon > 0$, että leikkaukset $B(x_0, \varepsilon) \cap X_1$ ja $B(x_1, \varepsilon) \cap X_1$ ovat ympyräsektoreita. Valitaan piste $y_i \in B(x_i, \delta) \cap X_1$, $i \in \{0, 1\}$. Tällöin jana $[x_i, y_i]$ sisältyy vastaavaan ympyräsektoriin. Lauseen 2.3 nojalla komponentti X_1 on murtoviivayhtenäinen, joten on olemassa pisteet y_0 ja y_1 yhdistävä murtoviiva $M_0 \subset X_1$. Olkoon $M = [x_0, y_0] \cup M_0 \cup [y_1, x_1]$. Joukko M on pisteet x_0 ja x_1 yhdistävä murtoviiva, joka sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X_1. $\square$

Seuraavaa lemmaa käytetään Lauseen 3.6 todistuksessa.

Lemma 3.5. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoot $M_1, \ldots, M_n \subset \bar{X}_1$ erillisiä murtoviivoja, jotka sisältyvät päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X_1. Olkoon $k \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoot z_k ja z_k' murtoviivan M_k päätepisteet. Olkoon $N_k \subset J$ pisteet z_k ja z_k' yhdistävä murtoviiva. Oletetaan, että murtoviiva N_k sisältää jonkin murtoviivan M_j toisen päätepisteen. Tällöin se sisältää kyseisen murtoviivan molemmat päätepisteet.*

Todistus: Oletetaan, että murtoviiva $N_k \subset J$ sisältää jonkin murtoviivan M_j toisen päätepisteen, $j \neq k$. Tehdään vastaoletus, että murtoviivan M_j toinen päätepiste ei sisälly murtoviivaan N_k (Kuva 11). Olkoot

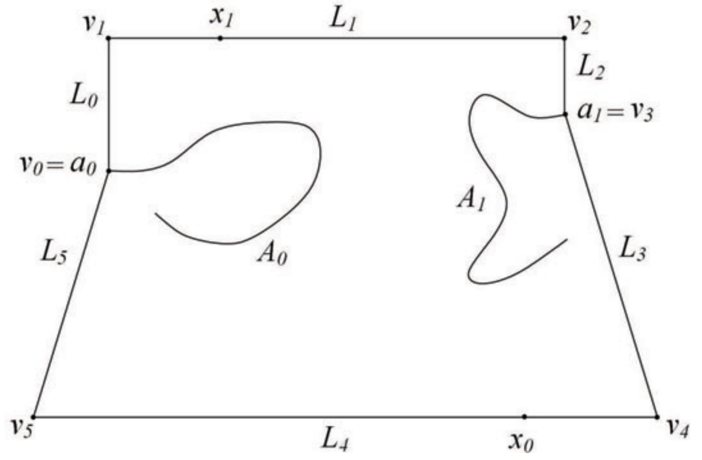


Kuva 11

murtoviivan M_j päätepisteet z_j ja z_j'. Murtoviivat M_k ja M_j ovat erillisiä, joten voidaan olettaa, että $z_j \in J \setminus N_k$ ja $z_j' \in N_k \setminus \{z_k, z_k'\}$. Lauseen 3.2 nojalla tiedetään, että joukolla $X_1 \setminus M_k$ on täsmälleen kaksi komponenttia eikä kummankaan komponentin reuna sisällä sekä pistettä z_j että pistettä z_j'.

Toisaalta yhtenäinen joukko $M_j \setminus \{z_j, z_j'\} \subset X_1$ ei oletuksen mukaan kohtaa murtoviivaa M_k. Näin se sisältyy joukon $X_1 \setminus M_k$ toiseen komponenttiin. Pisteet z_j ja $z_j' \in J$ kuuluvat siis tämän komponentin reunaan. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. Siis murtoviivan M_j molemmat päätepisteet sisältyvät joko joukkoon N_k tai joukkoon $J \setminus N_k$. $\square$

Seuraavassa lauseessa tarkastellaan tietynlaista kuusikulmiota sekä kahta erillistä kaarta, jotka leikkaavat kuusikulmiota ainoastaan toisissa päätepisteissään (Kuva 12). Vastaavaa kuusikulmiota käytetään Jordanin kaarilauseen todistuksessa. Nyt osoitetaan, että on olemassa murtoviiva, joka sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta tämän



KUVA 12

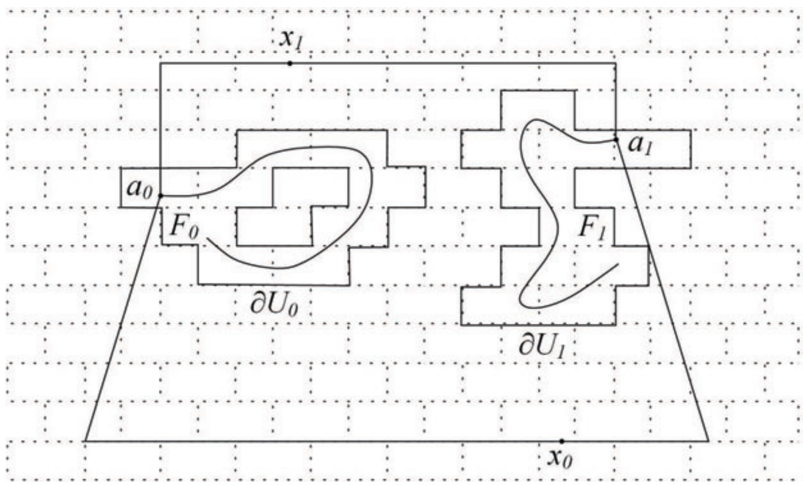
kuusikulmion sisäpuolelle eikä kohtaa kumpaakaan tarkasteltavaa kaarta.

Lause 3.6. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ kuusikulmio, jonka sivut ovat $L_0, \ldots, L_5$. Olkoot v_i ja v_{i+1} janan L_i päätepisteet jokaisella $i \in \mathbb{Z}_6$. Oletetaan, että sivut L_0 ja L_2 ovat y-akselin suuntaisia ja sivut L_1 ja L_4 x-akselin suuntaisia (Kuva 12). Olkoon X_1 avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Olkoot A_0, $A_1 \subset \bar{X}_1$ sellaiset erilliset kaaret, että $A_i \cap J = \{a_i\}$, missä piste a_i on kaaren A_i päätepiste ($i \in \{0,1\}$). Oletetaan lisäksi, että $a_0 = v_0$ ja $a_1 = v_3$. Olkoot $x_0 \in L_4 \setminus \{v_4, v_5\}$ ja $x_1 \in L_1 \setminus \{v_1, v_2\}$. Tällöin on olemassa sellainen pisteet x_0 ja x_1 yhdistävä murtoviiva M, että $M \subset \bar{X}_1$, $M \cap (A_0 \cup A_1) = \emptyset$ ja $M \cap J = \{x_0, x_1\}$.*

Todistus: Kaaret A_0 ja A_1 ovat kompakteja ja erillisiä, joten etäisyys $d(A_0, A_1) > 0$. Olkoot $E_0 = \cup_{i=1}^4 L_i$ ja $E_1 = L_0 \cup L_1 \cup L_4 \cup L_5$. Olkoon $i \in \{0,1\}$. Joukot A_i ja E_i ovat myös kompakteja ja erillisiä, joten $d(A_i, E_i) > 0$. Olkoon $\varepsilon = \frac{1}{3}\min\{d(A_0, A_1), d(A_0, E_0), d(A_1, E_1)\}$. Tällöin joukot $B(A_0, \varepsilon)$ ja $B(A_1, \varepsilon)$ ovat kaarien A_0 ja A_1 erilliset ympäristöt ja $B(A_i, \varepsilon) \cap E_i = \emptyset$, $i \in \{0,1\}$.

Jaetaan taso $\mathbb{R}^2$ kuvan 13 mukaisesti suljetuiksi suorakulmioiksi q_k, joiden läpimitta on alle ε. Olkoon $i \in \{0,1\}$. Olkoon $F_i = \cup\{q_k : q_k \cap A_i \neq \emptyset\}$. Kaari A_i on rajoitettu, joten joukkoon F_i sisältyy äärellisen monta suljettua suorakulmiota q_k. Joukko F_i on siis suljettu. Jokaisen joukon $q_k \subset F_i$ läpimitta on alle ε, joten $F_i \subset B(A_i, \varepsilon)$. Näin $F_i \cap E_i = \emptyset$ ja $F_0 \cap F_1 = \emptyset$.

Joukon F_i reuna koostuu äärellisestä määrästä erillisiä monikulmioita, mahdollisesti vain yhdestä monikulmiosta. Jokainen suorakulmio q_k on polkuyhtenäinen ja kaari A_i yhdistää mitkä tahansa suorakulmiot $q_k \subset F_i$, joten joukko F_i on polkuyhtenäinen ja siten yhtenäinen. Näin joukon $\mathbb{R}^2 \setminus F_i$ rajoittamattoman komponentin U_i reuna $\partial U_i \subset \partial F_i$ on



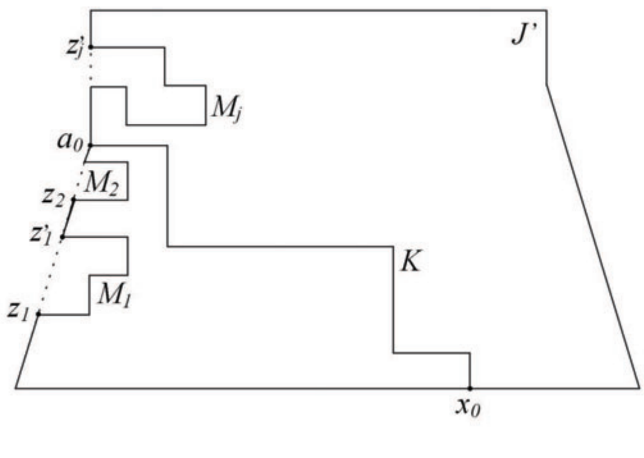
KUVA 13

monikulmio. Joukko F_i on suljettu, joten $\partial U_i \subset F_i$. Toisaalta suorakulmiot q_k ja joukko F_i on muodostettu niin, että $A_i \subset \mathrm{int} F_i$. Näin $\partial U_i \cap A_i = \emptyset$.

Kuusikulmio J kohtaa joukon U_i pisteissä $x_0 \in L_4$ ja $x_1 \in L_1$ sekä joukon F_i pisteessä a_i. Näin sen täytyy kohdata reuna ∂U_i sekä pisteiden x_0 ja a_i välillä että pisteiden x_1 ja a_i välillä. Näin monikulmio ∂U_i leikkaa monikulmion J ainakin kahdessa pisteessä. Toisaalta pisteet $x_0 \in L_4$ ja a_i voidaan yhdistää toisiinsa janalla L, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukkoon X_1. Myös jana L on yhtenäinen, joten se kohtaa myös reunan ∂U_i jossain pisteessä $x \in L \setminus \{x_0, a_i\}$. Tällöin piste $x \in X_1$, joten $\partial U_i \cap X_1 \neq \emptyset$. Leikkaus $\partial U_i \cap \bar{X}_1$ sisältää siis ainakin yhden murtoviivan, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukkoon X_1. Joukko ∂U_i on monikulmio, joten kyseisiä murtoviivoja on äärellinen määrä eivätkä ne kohtaa toisiaan joukossa X_1.

Tarkastellaan seuraavassa leikkausta $\partial U_0 \cap \bar{X}_1$. Olkoot $M_1, \ldots, M_n$ leikkaukseen $\partial U_0 \cap \bar{X}_1$ sisältyvät murtoviivat, jotka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyvät joukkoon X_1. Olkoot z_j ja z_j' murtoviivan M_j päätepisteet jokaisella $j \in \{1, \ldots, n\}$. Osoitetaan seuraavaksi, että jonkin murtoviivan M_j päätepisteistä toinen kuuluu joukkoon $L_5 \setminus \{v_5, a_0\}$ ja toinen joukkoon $L_0 \setminus \{a_0, v_1\}$:

Tehdään vastaoletus, että näin ei ole. Tällöin joko (1) minkään murtoviivan M_j toinen päätepiste ei kuulu joukkoon $L_5 \setminus \{v_5, a_0\}$ eikä joukkoon $L_0 \setminus \{a_0, v_1\}$ tai (2) jokaisen murtoviivan M_j molemmat päätepisteet kuuluvat joko joukkoon $L_5 \setminus \{v_5, a_0\}$ tai joukkoon $L_0 \setminus \{a_0, v_1\}$. Joka tapauksessa jokainen murtoviiva $M_j \subset \partial U_0 \subset \partial F_0 \subset F_0$. Luku ε valittiin niin, että leikkaus $F_0 \cap E_0 = \emptyset$. Näin yksikään murtoviiva M_j ei voi kohdata kuusikulmion J sivuja $L_1, \ldots, L_4$. Toisaalta $A_0 \subset \mathrm{int} F_0$, joten $a_0 \neq M_j$. Siis murtoviivojen M_j päätepisteiden täytyy kuulua

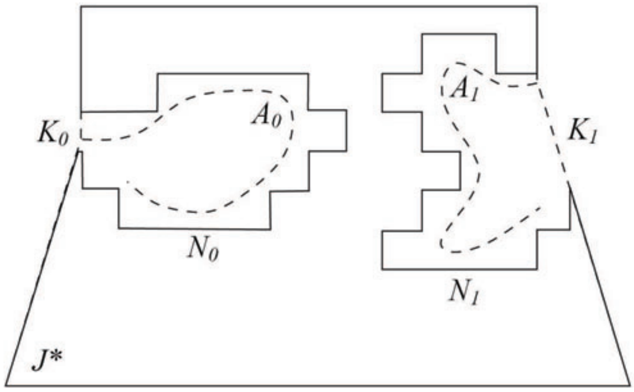


KUVA 14

joukkoon $(L_0 \cup L_5) \setminus \{v_1, v_5, a_0\}$. Tämä on ristiriidassa tapauksen (1) kanssa.

Tarkastellaan tapausta (2), jossa jokaisen murtoviivan M_j molemmat päätepisteet kuuluvat joko joukkoon $L_5 \setminus \{v_5, a_0\}$ tai joukkoon $L_0 \setminus \{a_0, v_1\}$ (Kuva 14). Merkitään $M^* = \cup_{j=1}^{n} M_j$. Lemman 3.5 nojalla voidaan muodostaa uusi monikulmio $J' \subset \bar{X}_1$ seuraavasti: Olkoon $z_1 \in M^* \cap J$ pisteestä v_5 lukien ensimmäinen piste, joka on jonkin murtoviivan M_j päätepiste. Voidaan olettaa, että pisteestä z_1 alkava murtoviiva on M_1, sillä murtoviivat voidaan tarvittaessa nimetä uudelleen. Jos pisteestä z_1 alkaa useampi kuin yksi murtoviiva M_j, valitaan murtoviivaksi M_1 se murtoviiva, jonka toisen päätepisteen z_1' etäisyys pisteestä z_1 on suurin. Korvataan jana $[z_1, z_1'] \subset J$ murtoviivalla M_1. Olkoon $z_2 \in M^* \cap J$ pisteestä z_1' lukien ensimmäinen piste, joka on jonkin murtoviivan M_j päätepiste, $i \in \{2, \ldots, n\}$. Mahdollisesti $z_2 = z_1'$, jos kahdella eri murtoviivalla on yhteinen päätepiste. Voidaan olettaa kuten edellä, että pisteestä z_2 alkava murtoviiva on M_2. Samoin jos pisteestä z_2 alkaa useampi kuin yksi murtoviiva M_j, valitaan murtoviivaksi M_2 se murtoviiva, jonka toisen päätepisteen z_2' etäisyys pisteestä z_2 on suurin. Korvataan jana $[z_2, z_2'] \subset J$ murtoviivalla M_2. Jatketaan näin kunnes saavutetaan sellainen piste $z_j' \in M^* \cap J$, että monikulmio J ei pisteiden z_j' ja v_1 välillä kohtaa joukkoa M^* eli yhtään murtoviivaa M_j.

Piste $a_0 \in J$ ei oletuksen mukaan sisälly mihinkään janaan $[z_j, z_j']$, joten $a_0 \in J'$. Samoin $x_0 \in J'$. Lemman 3.4 nojalla on tällöin olemassa pisteet a_0 ja x_0 yhdistävä murtoviiva K, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J'$ rajoitettuun komponenttiin X_1'. Näin $K \cap \partial U_0 = \emptyset$. Toisaalta murtoviiva K kohtaa pisteessä a_0 joukon F_0 ja pisteessä x_0 joukon U_0, joten yhtenäisenä joukkona se kohtaa reunan ∂U_0. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. On siis olemassa sellainen murtoviiva $M_j \subset \partial U_0$, että toinen sen päätepisteistä kuuluu



Kuva 15

joukkoon $L_5 \setminus \{v_5, a_0\}$ ja toinen joukkoon $L_0 \setminus \{a_0, v_1\}$. Olkoon tämä murtoviiva N_0.

Vastaavasti voidaan tarkastella leikkaukseen $\partial U_1 \cap \bar{X}_1$ sisältyviä murtoviivoja, jotka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyvät joukkoon X_1, ja osoittaa, että jonkin tällaisen murtoviivan toinen päätepiste kuuluu joukkoon $L_2 \setminus \{v_2, a_1\}$ ja toinen joukkoon $L_3 \setminus \{a_1, v_4\}$. Olkoon tämä murtoviiva N_1. Olkoot y_i ja y_i' murtoviivan N_i päätepisteet, $i \in \{0, 1\}$. Olkoon $K_i \subset J$ se pisteet y_i ja y_i' yhdistävä murtoviiva, joka sisältää pisteen a_i. Olkoon $J^* = (J \setminus (K_0 \cup K_1)) \cup N_0 \cup N_1$ (Kuva 15). Tällöin $J^* \subset \bar{X}_1$ on monikulmio ja x_0, $x_1 \in J^*$. Olkoon joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J^*$ rajoitettu komponentti X_1^* ja rajoittamaton komponentti X_0^*. Piste $a_i \in K_i \setminus \{y_i, y_i'\}$, joten $a_i \in X_0^*$, $i \in \{0, 1\}$. Kaaret A_0 ja A_1 eivät kohtaa monikulmiota J^*, joten ne yhtenäisinä joukkoina sisältyvät näin kokonaisuudessaan komponenttiin X_0^*. Lemman 3.4 nojalla on olemassa sellainen pisteet x_0 ja $x_1 \in J^*$ yhdistävä murtoviiva $M \subset \bar{X}_1^*$, että $M \cap J^* = \{x_0, x_1\}$. Tällöin $M \cap (A_0 \cup A_1) = \emptyset$, $M \setminus \{x_0, x_1\} \subset X_1^* \subset X_1$ ja $M \cap J = \{x_0, x_1\}$. □

Lauseen 3.6 murtoviivaa apuna käyttäen voidaan nyt todistaa Jordanin kaarilause. Sen todistuksessa nojaudutaan myös Lauseeseen 3.3.

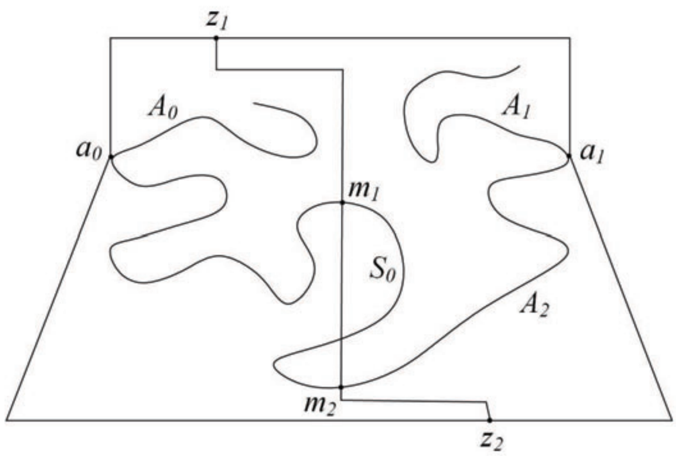
Lause 3.7 (Jordanin kaarilause). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kaari. Tällöin joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kaari. Se on rajoitettu, joten on olemassa sellainen kuula $B(\bar{0}, r)$, että $A \subset B(\bar{0}, r)$. Joukko $\mathbb{R}^2 \setminus B(\bar{0}, r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen ja rajoittamaton, joten se sisältyy joukon $\mathbb{R}^2 \setminus A$ rajoittamattomaan komponenttiin. Joukon $\mathbb{R}^2 \setminus A$ mahdolliset muut komponentit sisältyvät kuulaan $B(\bar{0}, r)$. Näin joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on täsmälleen yksi rajoittamaton komponentti. Osoitetaan, että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ei ole rajoitettua komponenttia. Tehdään vastaoletus, että sillä on ainakin yksi rajoitettu komponentti. Olkoon se U. Kaari A on suljettu, joten joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja sen komponentit ovat avoimia.

Näin reuna $\partial U \subset A$. Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa sellainen kaari $A' \subset A$, että $\partial U \subset A'$ ja kaaren A' päätepisteet kuuluvat joukkoon ∂U:

Rajoitetun komponentin reuna ∂U on suljettu ja rajoitettu, joten se on tason osajoukkona kompakti. Kaari A on homeomorfinen välin $I = [0,1]$ kanssa, eli on olemassa homeomorfismi $f\colon A \to I$. Myös kuvajoukko $f\partial U \subset I$ on kompakti. On siis olemassa sellainen väli $[a,b] \subset I$, että $f\partial U \subset [a,b]$ ja $a, b \in f\partial U$. Joukko $A' = f^{-1}[a,b] \subset A$ on kaari, jonka päätepisteet ovat $x_0 = f^{-1}(a)$ ja $x_1 = f^{-1}(b)$. Lisäksi $\partial U = f^{-1}f\partial U \subset f^{-1}[a,b]$ ja $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(b) \in \partial U$. Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin kaarta A'.

Kaari A' on kompakti, joten kuvaus $pr_1\colon A' \to \mathbb{R}$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa A'. Näin voidaan kaaren A' ympärille muodostaa kuusikulmio J kuten kuvassa 16 niin, että kaari ja kuusi-



Kuva 16

kulmio leikkaavat toisensa täsmälleen kahdessa pisteessä a_0 ja a_1. On huomattava, että nämä pisteet eivät välttämättä ole kaaren A' päätepisteet x_0 ja x_1. Olkoon $A_i \subset A'$ pisteet a_i ja x_i yhdistävä kaari, $i \in \{0,1\}$. Jos $x_i = a_i$, olkoon $A_i = \{a_i\}$. Olkoon $A_2 \subset A'$ pisteet a_0 ja a_1 yhdistävä kaari. Kaari A' jakaantuu näin enintään kolmeksi suljetuksi kaareksi A_0, A_1 ja A_2 kuten kuvassa 16. Olkoon X_1 joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti eli kuusikulmion J sisäpuoli. Oletetaan, että pisteet z_1 ja z_2 eivät ole kuusikulmion kärkipisteitä vaan kuuluvat sen x-akselin suuntaisille sivuille niin, että $pr_2(z_1) \neq pr_2(z_2)$. Lauseen 3.6 mukaan tällöin on olemassa sellainen pisteet z_1 ja z_2 yhdistävä murtoviiva M, että $M \subset X_1 \cup J$, $M \cap (A_0 \cup A_1) = \emptyset$ ja $M \cap J = \{z_1, z_2\}$.

Olkoon $m_1 \in M$ pisteestä z_1 lähtien murtoviivan M ensimmäinen piste, joka kuuluu myös kaareen A_2. Olkoon vastaavasti $m_2 \in M$ viimeinen piste, joka kuuluu kaareen A_2. Olkoon $M_1 \subset M$ pisteiden z_1 ja

m_1 välinen murtoviiva ja olkoon $M_2 \subset M$ pisteiden z_2 ja m_2 välinen murtoviiva. Olkoon $S_0 \subset A_2$ kaari, joka yhdistää pisteet m_1 ja m_2. Jos $m_1 = m_2$, olkoon $S_0 = \{m_1\}$. Olkoon $S = M_1 \cup S_0 \cup M_2$. Tällöin S on pisteet z_1 ja z_2 yhdistävä kaari, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettuun komponenttiin X_1.

Osoitetaan seuraavaksi, että murtoviivat M_1 ja M_2 eivät kohtaa komponenttia U: Olkoon $i \in \{1, 2\}$. Tehdään vastaoletus, että $M_i \cap U \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa piste $m \in U \cap (M_i \setminus \{m_i\})$, sillä piste $m_i \in A$. Olkoon $M_i' \subset M_i \setminus \{m_i\}$ pisteet m ja z_i yhdistävä murtoviiva. Jos $m = z_i$, olkoon $M_i' = \{z_i\}$. Yhdistetään piste z_i johonkin joukon $\mathbb{R}^2 \setminus A$ rajoittamattoman komponentin pisteeseen janalla L, joka kohtaa kuusikulmion ainoastaan pisteessä z_i. Murtoviiva $M_i' \cup L$ on yhtenäinen joukko, joka kohtaa sekä komponentin U että sen komplementin. Näin sen täytyy kohdata myös reuna $\partial U \subset A'$. Kuitenkin leikkaus $M_i \cap A' = \{m_i\}$, joten $M_i' \cap A' = \emptyset$. Kaari $A' \subset \bar{X}_1$, joten myös $L \cap A' = \emptyset$. Siis $(M_i' \cup L) \cap \partial U = \emptyset$. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. Siis $M_1 \cap U = \emptyset = M_2 \cap U$.

Tällöin $S \cap U = \emptyset$, sillä kaari $S_0 \subset A'$. Osoitetaan vielä, että $U \subset X_1$: Tehdään vastaoletus, että $U \not\subset X_1$. Tällöin joukko U kohtaa joko kuusikulmion J tai joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoittamattoman komponentin X_0. Oletetaan aluksi, että on olemassa piste $x \in U \cap X_0$. Piste x voidaan yhdistää johonkin joukon $\mathbb{R}^2 \setminus A$ rajoittamattoman komponentin pisteeseen murtoviivalla $N \subset X_0$. Tällöin murtoviiva N on yhtenäinen joukko, joka kohtaa sekä komponentin U että sen komplementin. Näin sen täytyy kohdata myös reuna ∂U, joka sisältyy kaareen $A' \subset \bar{X}_1$. Siis $N \cap \bar{X}_1 \neq \emptyset$. Tämä on ristiriita, joten $U \cap X_0 = \emptyset$. Oletetaan sitten, että on olemassa piste $x \in U \cap J$. Komponentti U on avoin, joten pisteellä x on ympäristö $B(x, \varepsilon) \subset U$. Kuusikulmio J on joukon X_0 reuna, joten pisteen x jokainen ympäristö kohtaa joukon X_0. Erityisesti $B(x, \varepsilon) \cap X_0 \neq \emptyset$, joten $U \cap X_0 \neq \emptyset$. Tämä on ristiriita. Siis $U \cap J = \emptyset$ ja $U \subset X_1$.

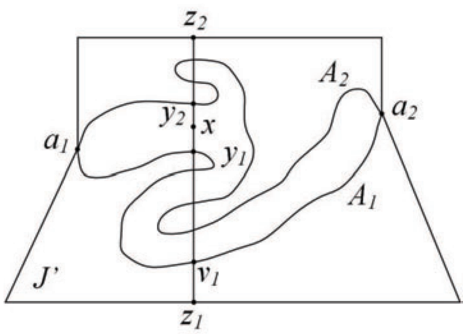
Yhtenäinen joukko U sisältyy siis joukkoon $X_1 \setminus S$, joten sen täytyy sisältyä joukon $X_1 \setminus S$ johonkin komponenttiin. Olkoon tämä komponentti V. Kaaren A' päätepisteet x_0, $x_1 \in \partial U$, joten ne kuuluvat komponentin V sulkeumaan. Osoitetaan seuraavaksi, että pisteet a_0 ja $a_1 \in J$ kuuluvat komponentin V reunaan: Olkoon $i \in \{0, 1\}$. Oletetaan aluksi, että $a_i \neq x_i$. Piste $x_i \in A_i \cap \bar{V}$ ja $A_i \cap S = \emptyset$, joten kaari A_i yhtenäisenä joukkona sisältyy kokonaisuudessaan sulkeumaan $\bar{V}$. Erityisesti piste $a_i \in \bar{V}$. Piste $a_i \in J$ ja komponentti $V \subset X_1 \setminus S$, joten $a_i \notin V$. Siis $a_i \in \partial V$. Oletetaan sitten, että $a_i = x_i$. Tällöin $a_i \in \bar{V}$, joten $a_i \in \partial V$ kuten edellä. Siis pisteet $a_0 \in A_0$ ja $a_1 \in A_1$ kuuluvat komponentin V reunaan.

Toisaalta pisteet $a_0 \in A_0$ ja $a_1 \in A_1$ kuuluvat joukon $J \setminus \{z_0, z_1\}$ eri komponentteihin, joten Lauseen 3.3 mukaan joukon $X_1 \setminus S$ minkään komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä a_0 että pistettä a_1. Tämä on ristiriita. Vastaoletus on siis väärä. Joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus A$ ei ole rajoitettua komponenttia vaan joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen. □

4. Jordanin käyrälause: todistus I

Tässä luvussa todistetaan Jordanin käyrälause. Apuna käytetään edellisessä luvussa todistettua Jordanin kaarilausetta. Myös tämän luvun lähteenä on käytetty kirjaa [3].

Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Käyrä J on kompakti, joten kuvaus $pr_1 \colon J \to \mathbb{R}$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa J. Käyrän J ympärille voidaan näin muodostaa sellainen kuusikulmio J', että leikkausjoukko $J \cap J'$ sisältää täsmälleen kaksi pistettä (Kuva 17). Olkoot nämä pisteet a_1 ja a_2. Ne jakavat käyrän J kahdeksi suljetuksi kaareksi A_1 ja A_2. Kaaret A_1 ja A_2 sisältyvät päätepisteitään a_1 ja a_2 lukuunottamatta kuusikulmion sisäpuolelle eli avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J'$ rajoitettuun komponenttiin X'. Valitaan kuusikulmion lyhyemmältä vaakasuoralta sivulta piste $z_2 \in J'$, joka ei ole kuusikulmion kärkipiste, ja yhdistetään se kuusikulmion pidempään sivuun pystysuoralla janalla L. Olkoon janan L toinen päätepiste z_1. Jana $L = [z_1, z_2]$ sisältyy siis päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X'.



Kuva 17

Lemma 4.1. *Jana L kohtaa sekä kaaren A_1 että kaaren A_2.*

Todistus: Olkoon $i \in \{1,2\}$. Kaari A_i on homeomorfinen välin $[0,1]$ kanssa, joten on olemassa homeomorfismi $\alpha_i \colon [0,1] \to A_i$. Voidaan olettaa, että $\alpha_i(0) = a_1$ ja $\alpha_i(1) = a_2$. Yhdistetty kuvaus $pr_1 \circ \alpha_i \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Piste $z_2 \in J'$ valittiin niin, että $pr_1(\alpha_i(0)) = pr_1(a_1) < pr_1(z_2) < pr_1(a_2) = pr_1(\alpha_i(1))$. Näin on olemassa sellainen piste $t \in]0,1[$, että $pr_1(\alpha_i(t)) = pr_1(z_2)$. Tämä tarkoittaa, että kaari A_i kohtaa janan L pisteessä $\alpha_i(t)$. □

Joukko $L \cap J$ on siis epätyhjä ja kompakti, joten on olemassa piste $v_1 \in L \cap J$, joka on lähinnä pistettä z_1. Voidaan olettaa, että kaari A_1 sisältää pisteen v_1. Muussa tapauksessa kaaret voidaan nimetä uudelleen. Myös joukko $L \cap A_1$ on kompakti, joten on olemassa piste $y_1 \in L \cap A_1$, jonka etäisyys pisteestä z_1 on suurin. Mahdollisesti $y_1 = v_1$. Osoitetaan seuraavaksi, että leikkaus $A_2 \cap [y_1, z_2]$ ei ole tyhjä:

Lemma 4.2. *Kaari A_2 kohtaa janan $[y_1, z_2]$.*

Todistus: Tehdään vastaoletus, että $A_2 \cap [y_1, z_2] = \emptyset$. Olkoon $S_1 \subset A_1$ pisteet v_1 ja y_1 yhdistävä kaari. Jos $y_1 = v_1$, olkoon $S_1 = \{v_1\}$. Olkoon $S = [z_1, v_1] \cup S_1 \cup [y_1, z_2]$. Leikkaus $[z_1, v_1] \cap J = \{v_1\} \subset A_1$, joten $S \cap A_2 = \emptyset$. Kaari S on siis pisteet z_1 ja z_2 yhdistävä yhtenäinen joukko, joka sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon $X' \setminus A_2$. Näin se sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta joukon $X' \setminus A_2$ johonkin komponenttiin, ja pisteet z_1 ja z_2 kuuluvat tämän komponentin reunaan.

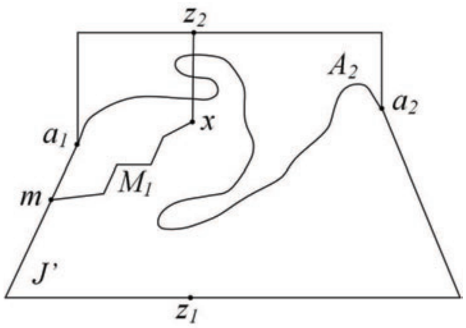
Toisaalta pisteet z_1 ja z_2 kuuluvat joukon $J' \setminus \{a_1, a_2\}$ eri komponentteihin, joten Lauseen 3.3 mukaan joukon $X' \setminus A_2$ minkään komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä z_1 että pistettä z_2. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. Siis kaari A_2 kohtaa janan $[y_1, z_2]$. □

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että avaruus $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on epäyhtenäinen:

Lause 4.3. *Avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoittamaton ja ainakin yksi rajoitettu komponentti.*

Todistus: Osoitetaan aluksi, että avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoittamaton komponentti. Jordanin käyrä J on rajoitettu, joten on olemassa sellainen kuula $B(\bar{0}, r)$, että $J \subset B(\bar{0}, r)$. Joukko $\mathbb{R}^2 \setminus B(\bar{0}, r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$ on yhtenäinen ja rajoittamaton, joten se sisältyy joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoittamattomaan komponenttiin. Joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ mahdolliset muut komponentit sisältyvät kuulaan $B(\bar{0}, r)$. Näin joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoittamaton komponentti. Olkoon se X_0.

Osoitetaan, että avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on myös rajoitettu komponentti: Lemman 4.2 mukaan kaari A_2 kohtaa janan $[y_1, z_2]$. Leikkaus $[y_1, z_2] \cap A_2$ on siis kompakti ja epätyhjä, joten on olemassa piste $y_2 \in [y_1, z_2] \cap A_2$, joka on lähinnä pistettä y_1 (Kuva 17). Olkoon $x \in]y_1, y_2[$. Osoitetaan, että piste x kuuluu avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettuun komponenttiin. Tehdään vastaoletus, että piste x kuuluu avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoittamattomaan komponenttiin X_0. Lauseen 2.3 nojalla komponentti X_0 on murtoviivayhtenäinen, joten on olemassa joukon X_0 murtoviiva M_0, joka yhdistää pisteen x johonkin kuusikulmion J' ulkopuolella olevaan pisteeseen. Olkoon $m \in M_0 \cap J'$ pisteestä x lukien ensimmäinen piste, jossa murtoviiva M_0 leikkaa kuusikulmion J'. Olkoon $M_1 \subset M_0$ pisteet x ja m yhdistävä murtoviiva, joka siis pistettä m lukuunottamatta sisältyy joukkoon X'. Piste $m \in J' \setminus \{a_1, a_2\}$, sillä $M_0 \subset X_0$ ja a_1, $a_2 \in J$. Joukolla $J' \setminus \{a_1, a_2\}$ on kaksi komponenttia, joista toinen sisältää pisteen z_1 ja toinen sisältää pisteen z_2. Olkoon pisteen z_i sisältävä komponentti

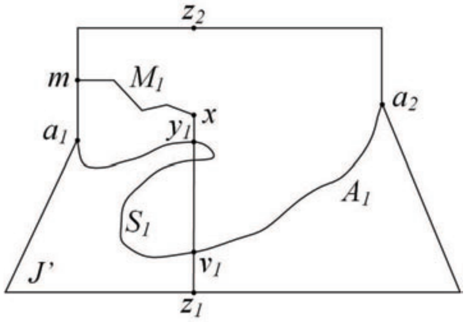


KUVA 18

$C(z_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Tällöin on kaksi mahdollisuutta: joko $m \in C(z_1)$ tai $m \in C(z_2)$.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $m \in C(z_1)$ (Kuva 18). Piste $y_1 \in L$ valittiin niin, että leikkaus $[y_1, z_2] \cap A_1 = \{y_1\}$. Näin $[x, z_2] \cap A_1 = \emptyset$. Olkoon $M = M_1 \cup [x, z_2]$. Tällöin $M \cap A_1 = \emptyset$. Murtoviiva M on siis pisteet m ja z_2 yhdistävä yhtenäinen joukko, joka sisältyy näitä pisteitä lukuunottamatta joukkoon $X' \setminus A_1$. Näin pisteet m ja z_2 kuuluvat joukon $X' \setminus A_1$ saman komponentin reunaan. Toisaalta pisteet $m \in C(z_1)$ ja z_2 kuuluvat joukon $J' \setminus \{a_1, a_2\}$ eri komponentteihin, joten Lauseen 3.3 mukaan joukon $X' \setminus A_1$ minkään komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä m että pistettä z_2. Tämä on ristiriita.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa $m \in C(z_2)$ (Kuva 19). Piste $v_1 \in A_1$ valittiin niin, että $[z_1, v_1] \cap J = \{v_1\} \subset A_1$. Toisaalta $[y_1, x] \cap J = \{y_1\} \subset A_1$. Olkoon $S_1 \subset A_1$ pisteet v_1 ja y_1 yhdistävä kaari. Jos $y_1 = v_1$, olkoon $S_1 = \{v_1\}$. Olkoon $S = [z_1, v_1] \cup S_1 \cup [y_1, x] \cup M_1$. Tällöin $S \cap A_2 = \emptyset$. Kaari S on siis pisteet m ja z_1 yhdistävä yhtenäinen joukko, joka sisältyy näitä pisteitä lukuunottamatta joukkoon $X' \setminus A_2$. Näin pisteet m ja z_1 kuuluvat joukon $X' \setminus A_2$ saman komponentin reunaan. Toisaalta pisteet $m \in C(z_2)$ ja z_1 kuuluvat joukon $J' \setminus \{a_1, a_2\}$ eri



KUVA 19

komponentteihin, joten Lauseen 3.3 mukaan joukon $X' \setminus A_2$ minkään komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä m että pistettä z_1. Tämä on ristiriita.

Molemmissa tapauksissa päädytään ristiriitaan, joten vastaoletus on väärä. Piste x kuuluu siis avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettuun komponenttiin. Avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on siis ainakin yksi rajoitettu komponentti. □

Jordanin kaarilauseen avulla voidaan osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ jokaisen komponentin reuna on Jordanin käyrä J:

Lause 4.4. *Olkoon X avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentti. Tällöin $\partial X = J$.*

Todistus: Olkoon $x \in \mathbb{R}^2 \setminus J$. Osoitetaan, että $x \notin \partial X$. Tehdään vastaoletus, että $x \in \partial X$. Tällöin pisteen x jokainen ympäristö kohtaa sekä komponentin X että sen komplementin. Olkoon $C(x)$ se avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentti, joka sisältää pisteen x. Lauseen 2.3 nojalla komponentti $C(x)$ on avoin. Pisteellä x on siis ympäristö $B(x, \varepsilon) \subset C(x)$. Tämä on ristiriita. Vastaoletus on siis väärä, ja $x \notin \partial X$. Siis $\partial X \subset J$.

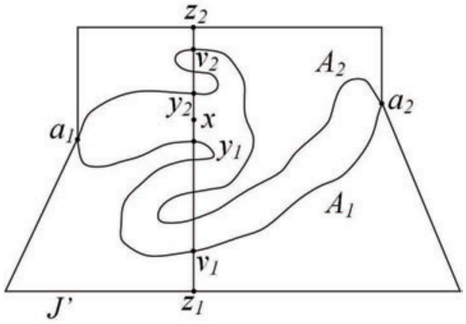
Tehdään vielä vastaoletus, että $\partial X \neq J$. Tällöin $\partial X \subset A$, missä $A \subsetneq J$ on kaari. Joukot X ja A ovat erillisiä, joten $\mathbb{R}^2 \setminus A = X \cup \complement(X \cup A)$. Joukot X ja $\complement(X \cup A)$ ovat erillisiä ja epätyhjiä. Reuna $\partial X \subset A$, joten joukko $X \cup A = \bar{X} \cup A$ on suljettu. Näin joukko $\complement(X \cup A)$ on avoin. Lauseen 2.3 nojalla myös komponentti X on avoin. Joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on siis epäyhtenäinen. Tämä on ristiriita, sillä Lauseen 3.7 mukaan joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen. Vastaoletus on siis väärä, ja $\partial X = J$. □

Edellisen lauseen tulokseen nojautuen voidaan osoittaa, että avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on vain yksi rajoitettu komponentti:

Lause 4.5. *Avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoitettu komponentti.*

Todistus: Tarkastellaan edelleen luvun alussa muodostettua kuusikulmiota J' ja janaa L (Kuva 20). Lauseen 4.3 mukaan piste $x \in]y_1, y_2[$ kuuluu avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettuun komponenttiin. Olkoon tämä rajoitettu komponentti X_1. Osoitetaan seuraavaksi, että avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ ei ole toista rajoitettua komponenttia:

Tehdään vastaoletus, että $U \neq X_1$ on myös avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Lemman 4.2 mukaan kaari A_2 kohtaa janan $[y_1, z_2]$. Leikkaus $[y_1, z_2] \cap A_2$ on siis epätyhjä ja kompakti, joten on olemassa piste $v_2 \in [y_1, z_2] \cap A_2$, jonka etäisyys pisteestä y_1 on suurin. Tällöin $[v_2, z_2] \subset \bar{X}_0$. Samoin $[z_1, v_1] \subset \bar{X}_0$. Jana $]y_1, y_2[$ sisältää pisteen x eikä kohtaa käyrää J, joten $[y_1, y_2] \subset \bar{X}_1$. Olkoon $S_i \in A_i$ pisteet v_i ja y_i yhdistävä kaari ($i \in \{1, 2\}$). Olkoon $S = [z_1, v_1] \cup S_1 \cup [y_1, y_2] \cup S_2 \cup [v_2, z_2]$. Tällöin joukko S on pisteet z_1 ja z_2 yhdistävä kaari, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukkoon X'. Lauseen 3.3 mukaan joukolla $X' \setminus S$ on ainakin kaksi komponenttia. Kaari S ei kohtaa komponenttia U, joten komponentti U sisältyy joukon $X' \setminus S$ johonkin komponenttiin.



Kuva 20

Lauseen 4.4 mukaan $\partial U = J$. Erityisesti pisteet a_1 ja $a_2 \in \partial U$. Näin pisteet a_1 ja a_2 kuuluvat joukon $X' \setminus S$ saman komponentin reunaan. Toisaalta pisteet a_1 ja a_2 kuuluvat joukon $J' \setminus \{z_1, z_2\}$ eri komponentteihin, joten Lauseen 3.3 mukaan joukon $X' \setminus S$ minkään komponentin reuna ei sisällä sekä pistettä a_1 että pistettä a_2. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. Siis avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoitettu komponentti. □

Kootaan nyt tämän luvun tulokset yhteen Jordanin käyrälauseeksi:

Lause 4.6 (Jordanin käyrälause)**.** *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä. Tällöin avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi komponenttia, joista toinen on rajoittamaton ja toinen rajoitettu. Käyrä J on kummankin komponentin reuna.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Lauseen 4.3 perusteella avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoittamaton ja ainakin yksi rajoitettu komponentti. Lauseen 4.5 perusteella avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen yksi rajoitettu komponentti. Avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on siis täsmälleen kaksi komponenttia, joista toinen on rajoittamaton ja toinen rajoitettu. Lauseen 4.4 mukaan käyrä J on kummankin komponentin reuna. □

5. Kuvausten nostojen olemassaolosta

Tässä luvussa määritellään käsitteet *homotopia*, *peitekuvaus*, *kuvauksen nosto* sekä *kuvauksen aste*. Luvun alkuosassa mainitaan tai todistetaan näihin liittyviä perustuloksia. Lauseet 5.2, 5.3 ja 5.9 on todistettu kirjassa [7], Lauseet 21.3, 21.4 ja 24.5. Luvun loppuosassa tarkastellaan tarkemmin nostojen olemassaoloa. Tämä luku sekä luvut 6, 7 ja 8 on pohjautuvat kirjaan [5]. Lähteenä on paikoin käytetty myös kirjaa [7].

Aloitetaan määrittelemällä seuraava uusi käsite:

Määritelmä 5.1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f, g\colon X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Kuvaus f on *homotooppinen* kuvauksen g kanssa, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $h\colon X \times I \to Y$, että

$h(x,0) = f(x)$ ja $h(x,1) = g(x)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin merkitään $f \simeq g$ ja myös $h\colon f \simeq g$. Kuvausta h sanotaan *homotopiaksi,* joka yhdistää kuvauksen f kuvaukseen g. Jos kuvaus f on homotooppinen vakiokuvauksen kanssa, niin sanotaan, että kuvaus f on *nollahomotooppinen.*

Oletetaan, että $h\colon X \times I \to Y$ on homotopia, joka yhdistää kuvauksen f kuvaukseen g. Määritellään kuvaus $h_t\colon X \to Y$ asettamalla $h_t(x) = h(x,t)$ jokaisella $t \in I$. Kuvaukset h_t ovat yhdistettyjä kuvauksia $h \circ \varphi_t$, missä kuvaukset $\varphi_t\colon X \to X \times I$ on määritelty asettamalla $\varphi_t(x) = (x,t)$ jokaisella $t \in I$. Kuvauksien φ_t komponenttikuvaukset ovat siis identtinen kuvaus ja vakiokuvaus, joten ne ovat jatkuvia. Siten myös kuvaukset h_t ovat jatkuvia jokaisella $t \in I$. Erityisesti $h_0 = f$ ja $h_1 = g$.

Lause 5.2. *Homotopia on ekvivalenssirelaatio kaikkien jatkuvien kuvausten $f\colon X \to Y$ joukossa $C(X,Y)$.* □

Homotopian määräämiä ekvivalenssiluokkia sanotaan *homotopialuokiksi.* Jos $f \in C(X,Y)$, niin kuvauksen f homotopialuokkaa merkitään $\bar{f}$. Kaikkien homotopialuokkien joukkoa merkitään $[X,Y]$.

Lause 5.3. *Olkoot $f_0, f_1\colon X \to Y$ ja $g_0, g_1\colon Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia. Oletetaan, että $f_0 \simeq f_1$ ja $g_0 \simeq g_1$. Tällöin $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.* □

Tästä nähdään, että homotopialuokka $\overline{f \circ g}$ riippuu vain homotopialuokista $\bar{f}$ ja $\bar{g}$ eikä lainkaan niiden edustajista f ja g. Näin voidaan määritellä homotopialuokkien $\bar{f}$ ja $\bar{g}$ yhdistäminen asettamalla $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{f \circ g}$.

Lause 5.4. *Olkoon $f\colon X \to Y$ nollahomotooppinen jatkuva kuvaus ja olkoot $g\colon Z \to X$, $h\colon Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia. Tällöin myös yhdistetyt kuvaukset $f \circ g\colon Z \to Y$ ja $h \circ f\colon X \to Z$ ovat nollahomotooppisia.*

Todistus: Kuvaus f on nollahomotooppinen, joten on olemassa homotopia $h\colon f \simeq \upsilon$, missä $\upsilon\colon X \to Y$ on vakiokuvaus. Merkitään $y_0 = \upsilon(x)$ kun $x \in X$. Lauseen 5.3 nojalla tällöin $f \circ g \simeq \upsilon \circ g$ ja $h \circ f \simeq h \circ \upsilon$. Edelleen $\upsilon(g(z)) = y_0$ kaikilla $z \in Z$ ja $h(\upsilon(x)) = h(y_0)$ kaikilla $x \in X$, eli kuvaukset $\upsilon \circ g$ ja $h \circ \upsilon$ ovat vakiokuvauksia. Siis kuvaukset $f \circ g$ ja $h \circ f$ ovat nollahomotooppisia. □

Joukko $C(X,S^1)$ varustettuna pisteittäisellä kertolaskulla on Abelin ryhmä, jossa jatkuvan kuvauksen $g\colon X \to S^1$ käänteisalkio g^{-1} määritellään kaavalla $g^{-1}(x) = \frac{1}{g(x)}$ ja ykkösalkio on vakiokuvaus $\upsilon\colon x \mapsto 1$. Tarkastellaan seuraavaksi kuvausten $f \in C(X,S^1)$ homotopialuokkia:

Olkoot $f_0, f_1, g_0, g_1\colon X \to S^1$ jatkuvia kuvauksia. Oletetaan, että $h_f\colon f_0 \simeq f_1$ ja $h_g\colon g_0 \simeq g_1$. Tulo $h_f \cdot h_g$ on jatkuva, ja $(h_f \cdot h_g)(x,0) = (f_0 \cdot g_0)(x)$ sekä $(h_f \cdot h_g)(x,1) = (f_1 \cdot g_1)(x)$, eli $h_f \cdot h_g\colon f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$. Siis homotopialuokka $\overline{f \cdot g}$ riippuu vain homotopialuokista $\bar{f}$ ja $\bar{g}$ eikä niiden edustajista. Näin voidaan määritellä homotopialuokkien $\bar{f}$ ja $\bar{g}$ tulo asettamalla $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$.

Lause 5.5. *Olkoon X topologinen avaruus. Homotopialuokkien joukko $[X, S^1]$ varustettuna homotopialuokkien kertolaskulla on Abelin ryhmä ja sitä merkitään $H^1(X)$. Jos kuvaus $f\colon Y \to X$ on jatkuva, niin kuvaus $f^*\colon H^1(X) \to H^1(Y)$, $f^*(\bar{g}) = \bar{g} \circ \bar{f}$, on homomorfismi.*

Todistus: Olkoot $\bar{f}$, $\bar{g}$ ja $\bar{h} \in [X, S^1]$. Tällöin $(\bar{f}\cdot \bar{g})\cdot \bar{h} = \overline{f\cdot g}\cdot \bar{h} = \overline{f\cdot g\cdot h} = \bar{f}\cdot (\bar{g}\cdot \bar{h})$, eli homotopialuokkien kertolasku on assosiatiivinen. Ykkösalkio on $\bar{v}$, sillä $\bar{v}\cdot \bar{f} = \overline{v\cdot f} = \bar{f} = \bar{f}\cdot \bar{v}$ kaikilla $\bar{f} \in [X, S^1]$. Alkion $\bar{f}$ käänteisalkio $\bar{f}^{-1} = \overline{f^{-1}}$, sillä $\overline{f^{-1}}\cdot \bar{f} = \overline{f^{-1}\cdot f} = \bar{v} = \bar{f}\cdot \overline{f^{-1}}$ kaikilla $\bar{f} \in [X, S^1]$. Tässä siis f^{-1} on kuvauksen f käänteisalkio ryhmässä $C(X, S^1)$. Lisäksi $\bar{f}\cdot \bar{g} = \bar{g}\cdot \bar{f}$ kaikilla $\bar{f}$ ja $\bar{g} \in [X, S^1]$, eli joukko $[X, S^1]$ varustettuna homotopialuokkien kertolaskulla todella on Abelin ryhmä.

Osoitetaan vielä, että $f^*(\bar{g}_1\cdot \bar{g}_2) = f^*(\bar{g}_1)\cdot f^*(\bar{g}_2)$. Olkoon $y \in Y$. Tällöin $((g_1\cdot g_2) \circ f)(y) = g_1(f(y))\cdot g_2(f(y)) = ((g_1 \circ f)\cdot (g_2 \circ f))(y)$, eli $(g_1\cdot g_2)\circ f = (g_1\circ f)\cdot (g_2\circ f)$. Siis $f^*(\bar{g}_1\cdot \bar{g}_2) = (\bar{g}_1\cdot \bar{g}_2)\circ \bar{f} = \overline{(g_1\cdot g_2) \circ f} = \overline{(g_1 \circ f)\cdot (g_2 \circ f)} = (\bar{g}_1 \circ \bar{f})\cdot (\bar{g}_2 \circ \bar{f}) = f^*(\bar{g}_1)\cdot f^*(\bar{g}_2)$. □

Seuraavaksi määritellään käsite peitekuvaus. Sen jälkeen osoitetaan, että eräs peitekuvaus on kuvaus $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi ix} = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Tätä kuvausta käytetään myöhemmin, kun määritellään käsite kuvauksen aste.

Määritelmä 5.6. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Kuvaus $p\colon X \to Y$ on *peitekuvaus,* jos se on surjektio ja jos jokaisella $y \in Y$ on sellainen ympäristö V, että $p^{-1}V$ on erillinen yhdiste avoimista joukoista U_j $(j \in J)$, ja p kuvaa jokaisen joukon U_j homeomorfisesti joukolle V. Tällöin sanotaan, että V on pisteen y *peiteympäristö* kuvauksen p suhteen.

Lause 5.7. *Kuvaus $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi ix} = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, on peitekuvaus.*

Todistus: Olkoon $y \in S^1$. Tällöin $y = e^{i\varphi_0}$ jollain $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$. Merkitään $x = \varphi_0/2\pi$, jolloin $p^{-1}\{y\} = x + \mathbb{Z} = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$. Siis kuvaus p on surjektio. Pisteen y peiteympäristöksi voidaan valita puoliympyrä $V = \{e^{i\varphi} : |\varphi - \varphi_0| < \pi/2\}$, sillä $p^{-1}V$ on yhdiste erillisistä avoimista väleistä $U_n =]x + n - 1/4, x + n + 1/4[$ $(n \in \mathbb{Z})$, ja p kuvaa jokaisen välin U_n homeomorfisesti joukolle V. □

Seuraavaksi määritellään käsite kuvauksen nosto. Sen jälkeen Lauseessa 5.9 annetaan ehtoja, joiden voimassa ollessa jatkuvalla kuvauksella on p-nosto, kun p on peitekuvaus.

Määritelmä 5.8. Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia ja $g\colon X \to Y$, $f\colon Z \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Jatkuva kuvaus $\tilde{f}\colon Z \to X$ on kuvauksen f *g-nosto* tai *nosto,* jos $g \circ \tilde{f} = f$ (Kuva 21).

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "g"] \\
Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f\circ p|I"'] & S^1
\end{tikzcd}
$$

KUVA 21

Lause 5.9. *Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia. Olkoon $p\colon X \to Y$ peitekuvaus, $f\colon Z \to Y$ jatkuva kuvaus, $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$ ja $f(z_0) = p(x_0)$. Lisäksi oletetaan, että jokin seuraavista ehdoista on voimassa:*

(1) *Z on yhtenäinen ja fZ sisältyy johonkin peiteympäristöön.*
(2) *$Z = I$ ja $z_0 = 0$.*
(3) *$Z = I^2$ ja $z_0 = (0, 0)$.*

Tällöin kuvauksella f on täsmälleen yksi sellainen p-nosto $\tilde{f}\colon Z \to X$, että $\tilde{f}(z_0) = x_0$. □

Tarkastellaan nyt jatkuvia kuvauksia $f\colon S^1 \to S^1$. Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ jatkuva kuvaus ja $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi ix}$. Lauseen 6 nojalla kuvauksella $f \circ p|I\colon I \to S^1$ on p-nosto $g\colon I \to \mathbb{R}$ (Kuva 21). Näin siis $p(g(0)) = f(p(0))$ ja $p(g(1)) = f(p(1))$. Koska lisäksi $p(0) = p(1)$, niin $p(g(0)) = f(p(0)) = f(p(1)) = p(g(1))$. Näin $e^{2\pi i(g(0)-g(1))} = p(g(0))/p(g(1)) = 1$, eli $g(0) - g(1) \in \mathbb{Z}$. Osoitetaan, että erotuksen $g(0) - g(1)$ arvo ei riipu nostosta g:

Olkoon $g'\colon I \to \mathbb{R}$ toinen kuvauksen $f \circ p|I\colon I \to S^1$ on p-nosto ja olkoon $x \in I$. Tällöin $p(g'(x)) = f(p(x)) = p(g(x))$, josta seuraa kuten edellä, että $g'(x) - g(x) = n$ jollain $n \in \mathbb{Z}$. Kuvauksen $g' - g$ arvot ovat siis kokonaislukuja. Väli I on yhtenäinen ja kuvaus $g' - g$ on jatkuva, joten myös kuvajoukko $(g' - g)I$ on yhtenäinen. Sen täytyy siis olla yksiö $\{n\}$, ja siten $g'(x) - g(x) = n$ kaikilla $x \in I$. Nostot erovat näin toisistaan vain kokonaislukuvakiolla, ja $g'(1) - g'(0) = g(1) + n - g(0) - n = g(1) - g(0)$. Voidaan siis asettaa seuraava määritelmä:

Määritelmä 5.10. Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ jatkuva kuvaus ja $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = e^{2\pi ix}$. Olkoon $g\colon I \to \mathbb{R}$ on jokin kuvauksen $f \circ p|I\colon I \to S^1$ p-nosto. Kuvauksen f *aste* $\deg(f)$ on luku $g(1) - g(0)$.

Seuraavaan lauseeseen on koottu monia tuloksia liittyen kuvausten asteisiin, homotopiaan ja nostojen olemassaoloon. Siinä muunmuassa osoitetaan, että millä tahansa jatkuvalla kuvauksella $f\colon S^1 \to S^1$ on nosto $\tilde{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}$ jos ja vain jos kuvaus f on nollahomotooppinen. Tämä tulos yleistetään myöhemmin Lauseessa 5.13 koskemaan kaikkia jatkuvia kuvauksia $f\colon X \to S^1$, missä X on mikä tahansa topologinen avaruus.

Lause 5.11. *Kuvaus* $\Phi\colon H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$, $\Phi(\bar{f}) = \deg(f)$, *on ryhmäisomorfismi. Erityisesti* $\deg(f\cdot f') = \deg(f) + \deg(f')$ *kaikilla jatkuvilla kuvauksilla* f, $f'\colon S^1 \to S^1$. *Lisäksi kaikilla jatkuvilla kuvauksilla* $f\colon S^1 \to S^1$ *seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

(1) *Kuvaus* f *on nollahomotooppinen.*
(2) *Kuvauksen* f *aste on nolla.*
(3) *Kuvauksella* f *on nosto* $\tilde{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}$.

Todistus: Osoitetaan aluksi, että homotooppisilla kuvauksilla on sama aste, eli että kuvaus Φ on hyvin määritelty. Olkoot $f, f'\colon S^1 \to S^1$ jatkuvia, keskenään homotooppisia kuvauksia ja olkoon $h\colon S^1 \times I \to S^1$ homotopia, joka yhdistää kuvauksen f kuvaukseen f'. Yhdistetty kuvaus $h \circ (p|I, \mathrm{id})\colon I \times I \to S^1$ on jatkuva, joten Lauseen 5.9 nojalla sillä on olemassa p-nosto $G\colon I \times I \to \mathbb{R}$. Olkoon $t \in I$. Merkitään $x = p(t)$. Tällöin siis $p(G(t,0)) = h(p(t), \mathrm{id}(0)) = h(x,0) = f(x) = f(p(t))$, joten kuvaus $g\colon I \to \mathbb{R}$, $g(t) = G(t,0)$, on kuvauksen $f \circ p|I$ nosto. Siis $\deg(f) = g(1) - g(0) = G(1,0) - G(0,0)$. Vastaavasti $\deg(f') = G(1,1) - G(0,1)$.

Tarkastellaan kuvausta $d\colon I \to \mathbb{R}$, joka määritellään asettamalla $d(u) = G(1,u) - G(0,u)$ kaikilla $u \in I$. Koska $p(1) = p(0)$, niin $p(G(1,u)) = h(p(1),u) = h(p(0),u) = p(G(0,u))$ jokaisella $u \in I$, joten erotus $G(1,u) - G(0,u)$ on aina kokonaisluku. Kuvauksen d arvot ovat siis kokonaislukuja. Kuvaus d on myös jatkuva, koska kuvaus G on jatkuva. Joukko I on yhtenäinen, joten myös kuvajoukko dI on yhtenäinen. Kuvauksen d täytyy siten olla vakiokuvaus. Näin $\deg(f) = d(0) = d(1) = \deg(f')$. Kuvaus Φ on siis hyvin määritelty.

Osoitetaan nyt, että kuvaus $\Phi\colon H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$ on homomorfismi. Olkoot $\bar{f}, \bar{f}' \in H^1(S^1)$ ja olkoot $f, f'\colon S^1 \to S^1$ näiden homotopialuokkien edustajat. Olkoot $g, g'\colon I \to \mathbb{R}$ kuvausten $f \circ p|I$ ja $f' \circ p|I$ nostot. Nämä ovat olemassa Lauseen 5.9 nojalla. Olkoon $t \in I$. Kuvaus $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ on homomorfismi ryhmästä $(\mathbb{R}, +)$ ryhmään $(S^1, \cdot)$, joten $p((g+g')(t)) = p(g(t) + g'(t)) = p(g(t))p(g'(t)) = f(p(t))f'(p(t)) = (f\cdot f')(p(t))$. Siis kuvaus $g + g'\colon I \to \mathbb{R}$ on kuvauksen $(f\cdot f') \circ p|I\colon I \to S^1$ nosto. Näin $\Phi(\bar{f}\cdot \bar{f}') = \Phi(\overline{f\cdot f'}) = \deg(f\cdot f') = (g+g')(1) - (g+g')(0) = g(1) - g(0) + g'(1) - g'(0) = \deg(f) + \deg(f') = \Phi(\bar{f}) + \Phi(\bar{f}')$. Kuvaus Φ on siis homomorfismi, ja lisäksi $\deg(f\cdot f') = \deg(f) + \deg(f')$ kaikilla jatkuvilla kuvauksilla f, $f'\colon S^1 \to S^1$.

Osoitetaan, että kuvaus Φ on surjektio. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Tarkastellaan kuvausta $f_n\colon S^1 \to S^1$, $f_n(z) = z^n$. Määritellään kuvaus $g_n\colon I \to \mathbb{R}$ asettamalla $g_n(t) = nt$. Olkoon $t \in I$. Tällöin $p(g_n(t)) = p(nt) = e^{2\pi int} = (e^{2\pi it})^n = p(t)^n = f_n(p(t))$, eli kuvaus g_n on kuvauksen $f_n \circ p|I$ nosto. Siten $\Phi(\bar{f}_n) = \deg(f_n) = g_n(1) - g_n(0) = n\cdot 1 - n\cdot 0 = n$.

Kuvaus Φ on injektio, jos sen ydin sisältää vain ryhmän $H^1(S^1)$ neutraalialkion eli vakiokuvauksen homotopialuokan. Riittää siis osoittaa, että jos kuvauksen f aste on nolla, niin se on nollahomotooppinen. Tämä tulee tehdyksi, kun seuraavaksi osoitetaan, että ehdot (1), (2) ja (3) ovat keskenään yhtäpitävät.

(1) $\Rightarrow$ (2). Oletetaan, että kuvaus f on nollahomotooppinen. Ympyrän S^1 vakiokuvaukset $z \mapsto a = e^{2\pi i x_a}$ ja $z \mapsto b = e^{2\pi i x_b}$ ovat keskenään homotooppiset kaikilla $a,\, b \in S^1$, mikä nähdään homotopiasta $h\colon S^1 \times I \to S^1$, $h(z,t) = e^{2\pi i((1-t)x_a+tx_b)}$. Siten voidaan olettaa, että kuvaus f on homotooppinen vakiokuvauksen $f_0\colon S^1 \to S^1$, $f_0(z) = z^0 = 1$ kanssa. Edellä osoitettiin, että kuvauksen f_0 nosto on kuvaus $g_0\colon t \mapsto 0 \cdot t$. Tiedetään myös, että keskenään homotooppisilla kuvauksilla on sama aste, joten $\deg(f) = \deg(f_0) = g_0(1) - g_0(0) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Oletetaan, että kuvauksen f aste on nolla. Kuvauksella $f \circ p|I$ on Lauseen 5.9 nojalla nosto $g\colon I \to \mathbb{R}$, ja koska $\deg(f) = 0$, niin $g(1) = g(0)$. Olkoon $A_1 = \{z \in S^1 : pr_2(z) \geq 0\}$ ja $A_2 = \{z \in S^1 : pr_2(z) \leq 0\}$, jolloin $S^1 = A_1 \cup A_2$. Määritellään kuvaus $\tilde{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} g \circ (p|[0,1/2])^{-1}(z), & z \in A_1 \\ g \circ (p|[1/2,1])^{-1}(z), & z \in A_2 \end{cases}$$

Kuvaukset $g \circ (p|[0,1/2])^{-1}$ ja $g \circ (p|[1/2,1])^{-1}$ ovat jatkuvia ja joukot A_1 ja A_2 suljettuja joukossa S^1. Lisäksi joukossa $A_1 \cap A_2 = \{(1,0),(-1,0)\}$ nämä kuvaukset saavat samat arvot, sillä $g(0) = g(1)$. Siten kuvaus $\tilde{f}$ on jatkuva. Lisäksi jos $z \in A_1$, niin $p(\tilde{f}(z)) = p \circ g \circ (p|[0,1/2])^{-1}(z) = f \circ p|I \circ (p|[0,1/2])^{-1}(z) = f(z)$. Vastaavasti jos $z \in A_2$, niin $p(\tilde{f}(z)) = f(z)$. Kuvaus $\tilde{f}$ on siis kuvauksen f nosto.

(3) $\Rightarrow$ (1). Oletetaan, että jatkuvalla kuvauksella $f\colon S^1 \to S^1$ on olemassa nosto $\tilde{f}\colon S^1 \to \mathbb{R}$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Kuvaus $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ on nollahomotooppinen, sillä homotopia $h\colon \mathbb{R} \times I \to S^1$, $h(x,t) = p((1-t)x + ta)$, yhdistää sen vakiokuvaukseen $x \mapsto p(a)$. Lauseen 5.4 nojalla yhdistettty kuvaus $f = p \circ \tilde{f}$ on tällöin myös nollahomotooppinen. $\square$

Seuraavassa lauseessa tutkitaan homotopiaa $h\colon X \times I \to S^1$. Oletuksena on, että kuvauksella $h_0\colon X \to S^1$ on p-nosto $\tilde{f}_0\colon X \to \mathbb{R}$. Tällöin pystytään osoittamaan, että itse homotopialla h on täsmälleen yksi sellainen p-nosto $\tilde{h}\colon X \times I \to \mathbb{R}$, että $\tilde{h}_0 = \tilde{f}_0$ (Kuva 22).

Lause 5.12. *Olkoon X topologinen avaruus, $\tilde{f}_0\colon X \to \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus ja $h\colon X \times I \to S^1$ sellainen homotopia, että $h(x,0) = p(\tilde{f}_0(x))$ kaikilla $x \in X$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi sellainen homotopia $\tilde{h}\colon X \times I \to \mathbb{R}$, että $p \circ \tilde{h} = h$ ja $\tilde{h}(x,0) = \tilde{f}_0(x)$ kaikilla $x \in X$.*

Todistus: Homotopia h on jatkuva, joten kuvaukset $\alpha_x\colon I \to S^1$, $\alpha_x(t) = h(x,t)$, ovat jatkuvia. Oletuksen mukaan $p(\tilde{f}_0(x)) = h(x,0) = \alpha_x(0)$, joten Lauseen 5.9 nojalla jokaisella kuvauksella α_x on täsmälleen yksi sellainen p-nosto $\tilde{\alpha}_x\colon I \to \mathbb{R}$, että $\tilde{\alpha}_x(0) = \tilde{f}_0(x)$. Määritellään kuvaus

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[ur, "\tilde{f}_0"] \arrow[r, "h_0"'] & S^1
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] \arrow[r, "h"'] & S^1
\end{tikzcd}
$$

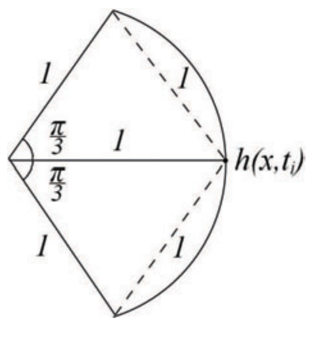
Kuva 22

$\tilde{h}\colon X \times I \to \mathbb{R}$ asettamalla $\tilde{h}(x,t) = \tilde{\alpha}_x(t)$. Näin määritellyllä kuvauksella $\tilde{h}$ pätee, että $p(\tilde{h}(x,t)) = p(\tilde{\alpha}_x(t)) = \alpha_x(t) = h(x,t)$ eli $p \circ \tilde{h} = h$, ja $\tilde{h}(x,0) = \tilde{\alpha}_x(0) = \tilde{f}_0(x)$ kaikilla $x \in X$. Osoitetaan, että kuvaus $\tilde{h}$ on jatkuva:

Kuvaus $h\colon X \times I \to S^1$ on jatkuva, joten jokaisella $(x,t) \in X \times I$ voidaan valita sellainen $\delta_{x,t} > 0$, että kun $d((x',t'),(x,t)) < \delta_{x,t}$, niin $d(h(x',t'),h(x,t)) < 1$. Olkoon $x \in X$. Välit $\left]t - \frac{1}{2}\delta_{x,t}, t + \frac{1}{2}\delta_{x,t}\right[$ muodostavat kompaktin joukon I avoimen peitteen. Sillä on siis äärellinen osapeite, joka koostuu väleistä $]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$, missä $i \in \{1,\dots,n\}$, $\delta_i = \frac{1}{2}\delta_{x,t_i}$ ja $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Olkoon δ pienin luvuista δ_i ja olkoon $U = B(x,\delta) \cap X$. Koska kysymyksessä on peite, niin voidaan olettaa, että välien $]t_{i-1} - \delta_{i-1}, t_{i-1} + \delta_{i-1}[$ ja $]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$ leikkaus on epätyhjä jokaisella $i \in \{2,\dots,n\}$. Olkoon t_i^* jokin näiden välien yhteinen piste jokaisella $i \in \{2,\dots,n\}$ ja olkoon $t_1^* = 0$.

Rajoittuma $\tilde{h}|(U \times \{0\}) = \tilde{f}_0|U$, joten $\tilde{h}|(U \times \{t_1^*\})$ on jatkuva. Olkoon $i \in \{1,\dots,n\}$. Oletetaan, että rajoittuma $\tilde{h}|(U \times \{t_i^*\})$ on jatkuva, ja osoitetaan, että tällöin $\tilde{h}$ on jatkuva pisteessä (x,t), kunhan $t \in]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$:

Osoitetaan aluksi, että joukko $F = h(U \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[)$ on ympyrän S^1 aito osajoukko. Jos nimittäin $(x',t') \in U \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$, niin $d((x',t'),(x,t_i)) < \sqrt{\delta^2 + \delta_i^2} \le \sqrt{2}\delta_i < \delta_{x,t_i}$, joten $d(h(x',t'),h(x,t_i)) < 1$. Tämä tarkoittaa, että joukko F sisältyy ympyrän S^1 kaareen A, jonka pituus on alle $2\pi/3$ (Kuva 23). Tiedetään, että alkukuva $p^{-1}A$



Kuva 23

muodostuu erillisistä väleistä E_n ($n \in \mathbb{Z}$), ja p kuvaa jokaisen välin E_n homeomorfisesti joukolle A. Olkoon E näistä väleistä se, johon piste $\tilde{h}(x, t_i^*)$ kuuluu. Oletuksen mukaan rajoittuma $\tilde{h}|(U \times \{t_i^*\})$ on jatkuva, joten pisteellä (x, t_i^*) on sellainen ympäristö $V \times \{t_i^*\} \subset U \times \{t_i^*\}$, että $\tilde{h}(V \times \{t_i^*\}) \subset E$. Olkoon $v \in V$. Yhdistetty kuvaus $(v, t) \mapsto t \mapsto \tilde{\alpha}_v(t) = \tilde{h}(v, t)$ on jatkuva, joten rajoittuma $\tilde{h}|(\{v\} \times I)$ on jatkuva. Joukko $\{v\} \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$ on yhtenäinen, sillä se on homeomorfinen välin $]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$ kanssa. Näin myös kuvajoukko $\tilde{h}(\{v\} \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[)$ on yhtenäinen. Näin se sisältyy kokonaisuudessaan joukkoon E, johon sen piste $\tilde{h}(v, t_i^*)$ kuuluu. Piste v saattoi olla mikä tahansa joukon V piste, joten $\tilde{h}(V \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[) \subset E$. Kuvauksen p rajoittuma $p|E \colon E \to A$ on homeomorfismi, joten rajoittuma $\tilde{h}|(V \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[) = (p|E)^{-1} \circ h|(V \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[)$ on jatkuva. Siis $\tilde{h}$ on jatkuva pisteessä (x, t), kunhan $t \in]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$. Koska x saattoi olla mikä tahansa joukon X piste, niin rajoittuma $\tilde{h}|(X \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[)$ on jatkuva.

Olkoon jälleen $x \in X$ ja $i \in \{1, \ldots, n\}$. Piste t_{i+1}^* kuuluu välille $]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[$, joten edellisen nojalla rajoittuma $\tilde{h}|(U \times \{t_{i+1}^*\})$ on jatkuva. Tästä taas seuraa, kuten edellä on nähty, että $\tilde{h}$ on jatkuva pisteessä (x, t), kunhan $t \in]t_{i+1} - \delta_{i+1}, t_{i+1} + \delta_{i+1}[$. Piste x saattoi jälleen olla mikä tahansa joukon X piste, joten myös rajoittuma $\tilde{h}|(X \times]t_{i+1} - \delta_{i+1}, t_{i+1} + \delta_{i+1}[)$ on jatkuva. Näin jatkamalla havaitaan, että rajoittumat $\tilde{h}|(X \times]t_i - \delta_i, t_i + \delta_i[)$ ovat jatkuvia jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$, joten kuvaus $\tilde{h}$ on jatkuva.

Osoitetaan vielä, että muita lauseen ehdot täyttäviä homotopioita ei ole. Olkoon $\tilde{g}$ jokin lauseen ehdot täyttävä homotopia. Tällöin kuvaukset $\tilde{\beta}_x \colon I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\beta}_x(t) = \tilde{g}(x, t)$, ovat jatkuvia jokaisella $x \in X$. Ne ovat kuvauksien $\alpha_x \colon I \to S^1$ nostoja, sillä $p(\tilde{\beta}_x(t)) = p(\tilde{g}(x, t)) = h(x, t) = \alpha_x(t)$. Niille pätee myös $\tilde{\beta}_x(0) = \tilde{g}(x, 0) = \tilde{f}_0(x)$. Siis välttämättä $\tilde{\beta}_x = \tilde{\alpha}_x$ jokaisella $x \in X$, joten $\tilde{g}(x, t) = \tilde{h}(x, t)$ kaikilla $(x, t) \in X \times I$ eli $\tilde{g} = \tilde{h}$. □

Tämän luvun viimeisessä lauseessa yleistetään Lausetta 5.11 ja osoitetaan, että millä tahansa jatkuvalla kuvauksella $f \colon X \to S^1$ on nosto $\tilde{f} \colon X \to \mathbb{R}$ jos ja vain jos kuvaus f on nollahomotooppinen. Apuna käytetään äsken todistettua Lausetta 5.12.

Lause 5.13. *Olkoon X topologinen avaruus ja $f \colon X \to S^1$ jatkuva kuvaus. Kuvauksella f on p-nosto $\tilde{f} \colon X \to \mathbb{R}$ jos ja vain jos kuvaus f on nollahomotooppinen.*

Todistus: Oletetaan, että kuvauksella f on p-nosto $\tilde{f} \colon X \to \mathbb{R}$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Kuvaus $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ on nollahomotooppinen, sillä homotopia $h \colon \mathbb{R} \times I \to S^1$, $h(x, t) = p((1-t)x + ta)$, yhdistää sen vakiokuvaukseen

$x \mapsto p(a)$. Lauseen 5.4 nojalla yhdistetty kuvaus $f = p \circ \tilde{f}$ on tällöin myös nollahomotooppinen.

Oletetaan, että kuvaus f on homotooppinen vakiokuvauksen $f_0 \colon x \mapsto z_0$ kanssa. Olkoon $h \colon X \times I \to S^1$ homotopia $f_0 \simeq f$. Valitaan sellainen $a \in \mathbb{R}$, että $p(a) = z_0$, ja määritellään kuvaus $\tilde{f}_0 \colon X \to \mathbb{R}$ asettamalla $\tilde{f}_0(x) = a$ kaikilla $x \in X$. Kuvaus $\tilde{f}_0$ ja homotopia h toteuttavat Lauseen 5.12 oletuksen $h(x, 0) = f_0(x) = z_0 = p(a) = p(\tilde{f}_0(x))$ kaikilla $x \in X$, joten sen nojalla on olemassa sellainen homotopia $\tilde{h} \colon X \times I \to \mathbb{R}$, että $p \circ \tilde{h} = h$ ja $\tilde{h}(x, 0) = \tilde{f}_0(x)$. Määritellään kuvaus $\tilde{f} \colon X \to \mathbb{R}$ asettamalla $\tilde{f}(x) = \tilde{h}(x, 1)$. Se on jatkuva ja $p(\tilde{f}(x)) = p(\tilde{h}(x, 1)) = h(x, 1) = f(x)$. Siis kuvaus $\tilde{f}$ on kuvauksen f p-nosto. □

6. Kuvausten jatkeista

Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $A \subset X$. Sanotaan, että kuvaus $g \colon X \to Y$ on kuvauksen $f \colon A \to Y$ *jatke*, jos $g|A = f$. Seuraavassa tarkastellaan tilannetta, jossa $A \subset X$ on suljettu ja avaruus X on ns. T_4-avaruus. Se määritellään seuraavalla tavalla:

Määritelmä 6.1. Olkoon X topologinen avaruus, joka toteuttaa seuraavan ehdon: Jos A, $B \subset X$ ovat erillisiä ja suljettuja joukkoja, niin niillä on erilliset ympäristöt. Tällöin sanotaan, että X on *T_4-avaruus.*

Jokainen metrinen avaruus on T_4-avaruus, mikä on osoitettu kirjassa [6], Lause 6.18. Seuraava lause on todistettu kirjassa [7], Lause 20.3.

Lause 6.2 (Tietzen jatkolause)**.** *Olkoon X T_4-avaruus ja $A \subset X$ suljettu. Olkoon $f \colon A \to [a, b]$ jatkuva kuvaus. Tällöin kuvauksella f on jatkuva jatke $g \colon X \to [a, b]$.* □

Vastaava tulos pätee myös tilanteessa, jossa kuvauksen maalijoukko on avoin väli:

Lause 6.3. *Olkoon X T_4-avaruus, $A \subset X$ suljettu, $E \subset \mathbb{R}$ avoin väli (mahdollisesti rajaton) ja $f \colon A \to E$ jatkuva kuvaus. Tällöin kuvauksella f on jatkuva jatke $g \colon X \to E$.*

Todistus: Kaikki avaruuden $\mathbb{R}$ avoimet välit ovat keskenään homeomorfisia, joten voidaan olettaa, että $E =]-1, 1[$. Koska $E \subset [-1, 1]$, niin Lauseen 6.2 mukaan kuvauksella $f \colon A \to E$ on jatkuva jatke $g_1 \colon X \to [-1, 1]$. Olkoon $C = g_1^{-1}\{-1, 1\}$. Joukko C on suljettu avaruudessa X, sillä kuvaus g_1 on jatkuva. Lisäksi $C \cap A = \emptyset$, koska $fA \subset E$. Määritellään kuvaus $h \colon A \cup C \to I$ asettamalla $hA = 1$ ja $hC = 0$. Tämä kuvaus on jatkuva, koska joukot A ja C ovat suljettuja, ja näin jokaisen suljetun joukon $F \subset I$ alkukuva $h^{-1}F \subset A \cup C$ on suljettu. Lauseen 6.2 mukaan myös kuvauksella $h \colon A \cup C \to I$ on jatkuva jatke $k \colon X \to I$. Määritellään nyt kuvaus $g \colon X \to E$ asettamalla $g(x) = g_1(x)k(x)$. Tämä kuvaus on jatkuva kahden jatkuvan kuvauksen tulona. Lisäksi, jos $x \in A$, niin $g(x) = g_1(x)k(x) = f(x)h(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)$. Jos taas $x \in C$, niin $g(x) = g_1(x)k(x) = \pm 1\cdot h(x) = \pm 1\cdot 0 = 0$, ja jos $x \in X \setminus (A \cup C)$, niin $g(x) = g_1(x)k(x) \in E$. Siis kuvaus g todella on kuvauksen f jatkuva jatke $X \to E$. $\square$

Seuraavassa lauseessa tarkastellaan homotopian jatkeen olemassaoloa. Tätä tulosta käytetään luvun viimeisen lauseen todistuksessa, jossa palataan tarkastelemaan nollahomotooppisia kuvauksia.

Lause 6.4. *Olkoon X T_4-avaruus, $A \subset X$ suljettu. Olkoon $f\colon X \to S^1$ jatkuva kuvaus ja $g\colon A \times I \to S^1$ homotopia, jolla $g_0 = f|A$. Tällöin on olemassa homotopian g jatkuva jatke $h\colon X \times I \to S^1$, jolla $h_0 = f$.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "g_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& S^1
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, hook] \arrow[dr, "g"'] & X \times I \arrow[d, dashed, "h"] \\
& S^1
\end{tikzcd}
$$

Kuva 24

Todistus: Määritellään kuvaus $q\colon A \times I \to S^1$ asettamalla $q(a,t) = g(a,t)/g(a,0)$. Tässä ajatellaan ympyrää S^1 kompleksilukujen osajoukkona, joten kysymyksessä on kompleksilukujen jakolasku. Kuvaus q on jatkuva, joten q on homotopia, joka yhdistää vakiokuvauksen $q_0\colon a \mapsto (1,0)$ kuvaukseen $q_1\colon a \mapsto g(a,1)/g(a,0)$. Vakiokuvauksella q_0 on p-nosto $\tilde{q}_0\colon A \to \mathbb{R}$, $\tilde{q}_0(a) = 0$ kaikilla $a \in A$, jolla pätee $p(\tilde{q}_0(a)) = p(0) = (1,0) = q_0(a) = q(a,0)$ kaikilla $a \in A$. Näin kuvaus $\tilde{q}_0$ ja homotopia q toteuttavat Lauseen 5.12 oletukset, joten on olemassa sellainen homotopia $\tilde{q}\colon A \times I \to \mathbb{R}$, että $p \circ \tilde{q} = q$ ja $\tilde{q}(a,0) = \tilde{q}_0(a) = 0$ kaikilla $a \in A$.

Määritellään kuvaus $l\colon (A \times I \cup X \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$
l(x,t) = \begin{cases} \tilde{q}(x,t), & (x,t) \in A \times I \\ 0, & (x,t) \in X \times \{0\}. \end{cases}
$$

Joukko A on suljettu avaruudessa X ja yksiö $\{0\}$ on suljettu avaruudessa I, joten joukot $A \times I$ ja $X \times \{0\}$ ovat suljettuja avaruudessa $X \times I$ ja myös sen osajoukossa $A \times I \cup X \times \{0\}$. Kuvaus $\tilde{q}$ on jatkuva kuten vakiokuvauskin. Lisäksi joukossa $A \times I \cap X \times \{0\} = A \times \{0\}$ molemmat saavat vain arvon 0, joten kuvaus l on jatkuva. Kahden suljetun joukon yhdiste $A \times I \cup X \times \{0\}$ on suljettu avaruudessa $X \times I$, joten Lauseen 6.3 nojalla kuvauksella $l\colon (A \times I \cup X \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ on jatkuva jatke $k\colon X \times I \to \mathbb{R}$. Määritellään jatkeen k avulla kuvaus $h\colon X \times I \to S^1$ asettamalla $h(x,t) = p(k(x,t))f(x)$. Kuvaus h on jatkuva, ja $h(x,0) = p(k(x,0))f(x) = p(l(x,0))f(x) = p(0)f(x) = f(x)$. Lisäksi, jos $(a,t) \in A \times I$, niin $h(a,t) = p(k(a,t))f(a) = p(l(a,t))f(a) = p(\tilde{q}(a,t))f(a) =$

$q(a,t)f(a) = f(a)\cdot g(a,t)/g(a,0) = g(a,0)\cdot g(a,t)/g(a,0) = g(a,t)$. Siis h on homotopian g jatke, jolla pätee, että $h_0 = f$. $\square$

Nyt voidaan todistaa tämän luvun päätulos, jonka mukaan jokaisella nollahomotooppisella jatkuvalla kuvauksella $f\colon A \to S^1$ on nollahomotooppinen jatkuva jatke $h_1\colon X \to S^1$. Tätä tulosta käytetään myöhemmin luvussa 7 Eilenbergin kriteerin (Lause 7.7) todistuksessa. Tässä on myös yhtymäkohta lukuun 5, sillä Lauseen 5.13 mukaan tällä nollahomotooppisella jatkeella on p-nosto $\tilde{h}_1\colon X \to \mathbb{R}$.

Lause 6.5. *Olkoon X T_4-avaruus, $A \subset X$ suljettu. Olkoon $f\colon A \to S^1$ nollahomotooppinen jatkuva kuvaus. Tällöin kuvauksella f on jatkuva jatke $h_1\colon X \to S^1$, joka on myös nollahomotooppinen.*

Todistus: Koska kuvaus f on nollahomotooppinen, niin on olemassa sellainen homotopia $g\colon A \times I \to S^1$, että g_0 on vakiokuvaus ja $g_1 = f$. Vakiokuvaus $g_0\colon X \to S^1$ ja homotopia $g\colon A \times I \to S^1$ toteuttavat Lauseen 6.4 oletukset, joten sen nojalla on olemassa homotopian g jatkuva jatke $h\colon X \times I \to S^1$, jolla h_0 on vakiokuvaus ja $h_1|A = g_1 = f$. Siis $h_1\colon X \to S^1$ on kuvauksen f jatkuva nollahomotooppinen jatke. $\square$

7. Polkukomponenteista

Tämän luvun tavoitteena on todistaa Eilenbergin kriteeri (Lause 7.7), jolla on tärkeä rooli Jordanin käyrälauseen todistuksessa. Aloitetaan kuitenkin määrittelemällä uusi käsite lokaalinen polkuyhtenäisyys:

Määritelmä 7.1. Topologinen avaruus X on *lokaalisti polkuyhtenäinen* pisteessä $x \in X$, jos pisteen x jokainen ympäristö sisältää pisteen x polkuyhtenäisen ympäristön. Jos avaruus X on lokaalisti polkuyhtenäinen jokaisessa pisteessä $x \in X$, niin sanotaan, että avaruus X on *lokaalisti polkuyhtenäinen.*

Seuraavan lauseen avulla on helppo muodostaa esimerkkejä lokaalisti polkuyhtenäisistä avaruuksista.

Lause 7.2. *Jos K on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu osajoukko, niin joukko $\mathbb{R}^n \setminus K$ on lokaalisti polkuyhtenäinen.*

Todistus: Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus K$ jokaisen pisteen jokainen ympäristö sisältää polkuyhtenäisen ympäristön: Olkoon $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ jokin pisteen x ympäristö, joka on siis avoin joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$. Joukko K on suljettu, joten joukko $\mathbb{R}^n \setminus K$ on avoin. Näin U on avoin myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$. On siis olemassa sellainen luku $\varepsilon > 0$, että $B(x,\varepsilon) \subset U$. Kuula $B(x,\varepsilon)$ on pisteen x polkuyhtenäinen ympäristö. $\square$

Kahdessa seuraavassa lauseessa todistetaan joitain jatkossa käyttökelpoisia tuloksia lokaalisti polkuyhtenäisistä avaruuksista.

Lause 7.3. *Lokaalisti polkuyhtenäisen avaruuden X polkukomponentit ovat avoimia avaruudessa X.*

Todistus: Olkoon $x \in X$. Olkoon $P(x)$ se avaruuden X polkukomponentti, johon piste x kuuluu. Olkoon $y \in P(x)$. Avaruus X on lokaalisti polkuyhtenäinen, joten pisteellä y on polkuyhtenäinen ympäristö V. Kaikki joukon V pisteet voidaan yhdistää polulla pisteeseen y ja se edelleen pisteeseen x, joten $V \subset P(x)$. Jokaisella pisteellä $y \in P(x)$ on siis ympäristö $V \subset P(x)$, joten $P(x)$ on avoin avaruudessa X. □

Lause 7.4. *Oletetaan, että avaruus X on lokaalisti polkuyhtenäinen ja yhtenäinen. Tällöin se on polkuyhtenäinen.*

Todistus: Tehdään vastaoletus, että avaruus X ei ole polkuyhtenäinen. Tällöin on olemassa sellaiset pisteet x ja $y \in X$, ettei niitä voi yhdistää polulla avaruudessa X. Olkoon pisteen x sisältävä polkukomponentti $P(x)$, ja merkitään $V = X \setminus P(x)$. Tällöin $y \in V$ eli joukot V ja $P(x)$ ovat epätyhjiä. Lisäksi $X = P(x) \cup V$ ja $P(x) \cap V = \emptyset$. Lauseen 7.3 nojalla polkukomponentti $P(x)$ on avoin avaruudessa X. Joukko $V = X \setminus P(x)$ on yhdiste muista avaruuden X polkukomponenteista, joten se on avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Avaruus X voidaan näin lausua kahden epätyhjän, avoimen ja erillisen joukon yhdisteenä, joten se on epäyhtenäinen. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä. Siis avaruus X on polkuyhtenäinen. □

Siirrytään tarkastelemaan avaruuden $\mathbb{R}^n \setminus K$ polkukomponentteja tilanteessa, jossa $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti. Kahta seuraavaa lausetta käytetään myös Eilenbergin kriteerin todistuksessa.

Lause 7.5. *Olkoon K avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompakti osajoukko ja A yhdiste joistain joukon $\mathbb{R}^n \setminus K$ polkukomponenteista. Tällöin joukko $A \cup K$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^n$.*

Todistus: Olkoon $B = (\mathbb{R}^n \setminus K) \setminus A$ yhdiste niistä joukon $\mathbb{R}^n \setminus K$ polkukomponenteista, jotka eivät sisälly joukkoon A. Lauseen 7.2 mukaan joukko $\mathbb{R}^n \setminus K$ on lokaalisti polkuyhtenäinen, joten sen polkukomponentit ovat Lauseen 7.3 nojalla avoimia joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$. Joukko B on polkukomponenttien yhdisteenä avoin joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$. Se on avoin myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, sillä $\mathbb{R}^n \setminus K$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Siten $A \cup K = \mathbb{R}^n \setminus B$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^n$. □

Lause 7.6. *Olkoon K avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompakti osajoukko ($n \geq 2$). Tällöin joukolla $\mathbb{R}^n \setminus K$ on täsmälleen yksi rajoittamaton polkukomponentti U, ja joukko $\mathbb{R}^n \setminus U$ on rajoitettu.*

Todistus: Joukko K on rajoitettu, joten on olemassa sellainen luku $r > 0$, että $K \subset B(0, r)$. Olkoon $E = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, 0) \geq r\}$. Joukko E on polkuyhtenäinen eikä kohtaa joukkoa K, joten se sisältyy johonkin joukon $\mathbb{R}^n \setminus K$ polkukomponenttiin U. Muut joukon $\mathbb{R}^n \setminus K$ polkukomponentit ja joukko K sisältyvät kuulaan $B(0, r)$. □

Euklidinen taso $\mathbb{R}^2$ ja kompleksitaso $\mathbb{C}$ voidaan samastaa keskenään, joten seuraavassa siirrytään merkintöjen helpottamiseksi tarkastelemaan avaruutta $\mathbb{C}$. Määritellään kuvaus $N\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to S^1$ asettamalla $N(z)=z/|z|$. Tämä kuvaus on jatkuva, sillä se on vakiokuvauksen ja kuvauksen $z\mapsto |z|=d(z,0)$ osamäärä.

Lause 7.7 (Eilenbergin kriteeri)**.** *Olkoon K avaruuden $\mathbb{C}$ kompakti osajoukko ja $a,b\in\mathbb{C}\setminus K$. Tällöin pisteet a ja b kuuluvat joukon $\mathbb{C}\setminus K$ samaan polkukomponentiin jos ja vain jos kuvaus $f\colon K\to S^1$, $f(z)=N\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$, on nollahomotooppinen.*

Todistus: Oletetaan, että a ja b kuuluvat joukon $\mathbb{C}\setminus K$ samaan polkukomponentiin. Tällöin on olemassa sellainen polku $\alpha\colon I\to\mathbb{C}\setminus K$, että $\alpha(0)=a$ ja $\alpha(1)=b$. Määritellään kuvaus $h\colon K\times I\to S^1$ asettamalla $h(z,t)=N\left(\frac{z-\alpha(t)}{z-b}\right)$. On huomattava, että $\alpha(t)\in\mathbb{C}\setminus K$ kaikilla $t\in I$ ja $z\in K$, joten $z-\alpha(t)\neq 0$ kaikilla $t\in I$. Kuvaus h on jatkuva ja $h(z,0)=f(z)$, $h(z,1)=1$ kaikilla $z\in K$. Kuvaus h on näin homotopia, joka yhdistää kuvauksen f vakiokuvaukseen $z\mapsto 1$. Siis kuvaus f on nollahomotooppinen.

Oletetaan, että a ja b kuuluvat joukon $\mathbb{C}\setminus K$ eri polkukomponentteihin ja osoitetaan, että tällöin kuvaus f ei ole nollahomotooppinen. Tehdään vastaoletus, että kuvaus f on nollahomotooppinen. Voidaan olettaa, että polkukomponentti $P(a)$ on rajoitettu. Jos nimittäin näin ei olisi, niin silloin Lauseen 7.6 nojalla polkukomponentti $P(b)$ olisi rajoitettu, jolloin voitaisiin vaihtaa pisteiden a ja b roolit ja siirtyä tarkastelemaan kuvausta $1/f$.

Kuvaus $f\colon K\to S^1$ on siis vastaoletuksen nojalla nollahomotooppinen, ja joukko K on suljettu avaruudessa $\mathbb{C}$ ja siten myös joukossa $\mathbb{C}\setminus P(a)$. Lauseen 6.5 nojalla tällöin on olemassa kuvauksen f jatkuva jatke $h_1\colon\mathbb{C}\setminus P(a)\to S^1$, joka on myös nollahomotooppinen. Toisaalta lauseke $N\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ on määritelty kaikilla $z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$, joten se määrittelee kuvauksen f jatkuvan jatkeen $h_2\colon (P(a)\cup K)\setminus\{a\}\to S^1$. Kuvausten h_1 ja h_2 lähtöjoukkojen leikkaus on K, jossa $h_1(x)=f(x)=h_2(x)$. Lisäksi molemmat lähtöjoukot ovat suljettuja avaruudessa $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ Lauseiden 7.3 ja 7.5 nojalla, joten kuvaukset h_1 ja h_2 määrittelevät jatkuvan kuvauksen $h\colon\mathbb{C}\setminus\{a\}\to S^1$, jolla $h|K=f$.

Määritellään kuvaus $k\colon S^1\times I\to S^1$ asettamalla $k(z,t)=h(a+z(\varepsilon+tR))$, missä $\varepsilon>0$ ja $R>0$ ovat sopivasti valittuja vakioita, $|z|=1$ ja $t\in I$. Kuvaus k on jatkuva, sillä se on saatu yhdistämällä ja kertomalla keskenään jatkuvia kuvauksia. Se on siis homotopia, joka yhdistää kuvauksen k_0 kuvaukseen k_1. Lauseen 5.11 nojalla keskenään homotooppisilla kuvauksilla on sama aste, joten $\deg(k_0)=\deg(k_1)$. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin kuvauksia k_1 ja k_0.

Joukko $\{a+z(\varepsilon+R) : z\in S^1\}$ on a-keskinen $\varepsilon+R$-säteinen ympyrä ja joukko $P(a)$ on rajoitettu, joten kun $R>0$ on valittu tarpeeksi suureksi, niin $a + z(\varepsilon + R) \notin P(a)$ kaikilla $z \in S^1$. Näin $k_1(z) = h(a + z(\varepsilon + R)) = h_1(a + z(\varepsilon + R))$ eli kuvaus k_1 on yhdistetty kuvauksesta h_1 ja kuvauksesta $\eta\colon S^1 \to \mathbb{C} \setminus P(a)$, $\eta(z) = a + z(\varepsilon + R)$. Kuvaus h_1 on nollahomotooppinen, joten Lauseen 5.4 nojalla yhdistetty kuvaus $k_1 = h_1 \circ \eta$ on myös nollahomotooppinen. Siis Lauseen 5.11 mukaan $\deg(k_1) = 0$.

Joukko $\{a + z\varepsilon : z \in S^1\}$ on a-keskinen ε-säteinen ympyrä ja joukko $P(a)$ on avoin, joten kun $\varepsilon > 0$ on valittu tarpeeksi pieneksi, niin $a + z\varepsilon \in P(a)$ kaikilla $z \in S^1$. Näin $k_0(z) = h(a + z\varepsilon) = h_2(a + z\varepsilon) = N\left(\frac{z\varepsilon}{a+z\varepsilon-b}\right) = N(z)N(\varepsilon)N(a + z\varepsilon - b)^{-1}$. Kuvaus $k_0\colon S^1 \to S^1$ on siis kolmen jatkuvan kuvauksen tulo, joten Lauseen 5.11 nojalla sen aste on näiden kuvausten asteiden summa. Ensimmäinen kuvaus $z \mapsto N(z)$ on ympyrän S^1 identtinen kuvaus id_{S^1}. Kuvauksen $\mathrm{id}_{S^1} \circ p|I\colon I \to S^1$ p-nosto on välin I inkluusio joukkoon $\mathbb{R}$, joten kuvauksen $z \mapsto N(z)$ aste on 1. Toinen kuvaus $z \mapsto N(\varepsilon)$ on vakiokuvaus, joten se on nollahomotooppinen ja sen aste on 0. Kolmas kuvaus $z \mapsto N(a + z\varepsilon - b)^{-1}$ on myös nollahomotooppinen, sillä kuvaus $\varphi\colon S^1 \times I \to S^1$, $\varphi(z, t) = N(a + z\varepsilon t - b)^{-1}$, on homotopia, jolla $\varphi(z, 0) = N(a - b)^{-1}$ kaikilla $z \in S^1$ ja $\varphi(z, 1) = N(a+z\varepsilon-b)^{-1}$. Kuvaus $z \mapsto N(a+z\varepsilon-b)^{-1}$ on siis homotooppinen vakiokuvauksen kanssa. Tässä on huomattava, että homotopia φ voidaan määritellä, sillä jokainen ympyrä $\{a + z\varepsilon t : z \in S^1\}$, missä $t \in I$, sisältyy aina kuulaan $\bar{B}(a, \varepsilon) \subset P(a)$, ja toisaalta oletuksen mukaan $b \notin P(a)$, joten $a + z\varepsilon t - b \neq 0$ kaikilla $t \in I$.

Kuvauksen k_0 asteeksi saadaan siis $\deg(k_0) = 1 + 0 + 0 = 1$. Tästä päädytään ristiriitaan, sillä yhdistämällä edellä saadut tulokset saadaan $1 = \deg(k_0) = \deg(k_1) = 0$. Vastaoletuksen täytyy siis olla väärä, eikä kuvaus f ole nollahomotooppinen. □

Tämän luvun viimeisessä lausessa osoitetaan Eilenbergin kriteerin avulla, että joukko $\mathbb{C} \setminus K$ on polkuyhtenäinen, jos joukko K on homeomorfinen välin I tai neliön I^2 kanssa. Tätä tulosta käytetään myöhemmin Lauseessa 8.4, jossa osoitetaan, että Jordanin käyrä $J \subset \mathbb{R}^2$ on avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ jokaisen polkukomponentin reuna.

Lause 7.8. *Olkoon K avaruuden $\mathbb{C}$ osajoukko, joka on homeomorfinen avaruuden I tai I^2 kanssa. Tällöin joukko $\mathbb{C} \setminus K$ on polkuyhtenäinen.*

Todistus: Olkoon $X = I$ tai $X = I^2$. Avaruus X on kummassakin tapauksessa kompakti. Oletetaan, että joukko K on homeomorfinen avaruuden X kanssa. Tällöin myös joukko K on kompakti. Olkoot a, $b \in \mathbb{C} \setminus K$. Olkoon $g\colon X \to K$ homeomorfismi ja olkoon $f\colon K \to S^1$ kuten Lauseessa 7.7. Yhdistetty kuvaus $f \circ g\colon X \to S^1$ on nollahomotooppinen, mikä nähdään esimerkiksi homotopiasta $h\colon X \times I \to S^1$, $h(x, t) = f(g((1 - t)x + tx_0))$, missä $x_0 \in X$. Näin myös $f = f \circ g \circ g^{-1}$ on Lauseen 5.4 nojalla nollahomotooppinen, ja siten Lauseen 7.7 nojalla pisteet a ja b kuuluvat joukon $\mathbb{C} \setminus K$ samaan polkukomponenttiin.

Nämä pisteet saattoivat olla joukon $\mathbb{C} \setminus K$ mitkä tahansa pisteet, joten tämän joukon on oltava polkuyhtenäinen. $\square$

8. Jordanin käyrälause: todistus II

Tässä luvussa esitetään toinen todistus Jordanin käyrälauseelle. Todistus pohjautuu pääasiassa edellisessä luvussa esitettyihin tuloksiin, erityisesti Eilenbergin kriteeriin (Lause 7.7), sekä luvun 5 Lauseeseen 5.13.

Olkoon $\Theta = S^1 \cup [-1, 1]$. Joukko Θ sisältää kolme Jordanin käyrää: ympyrän S^1, ylemmän puoliympyrän U ja alemman puoliympyrän L. Olkoon $j_0 \colon S^1 \to \Theta$ inkluusio. Määritellään upotukset j_1, $j_2 \colon S^1 \to \Theta$ asettamalla

$$j_1(x, y) = \begin{cases} (x, y), & y \geq 0 \\ (x, 0), & y \leq 0, \end{cases}$$

$$j_2(x, y) = \begin{cases} (x, 0), & y \geq 0 \\ (x, y), & y \leq 0. \end{cases}$$

Kuvaus j_1 kuvaa ympyrän S^1 homeomorfisesti ylemmäksi puoliympyräksi U ja kuvaus j_2 kuvaa ympyrän S^1 homeomorfisesti alemmaksi puoliympyräksi L. Seuraavassa lauseessa tarkastellaan yhdistettyjen kuvausten $f \circ j_i$ asteita, kun $f \colon \Theta \to S^1$ on jatkuva kuvaus.

Lause 8.1. *Olkoon $f \colon \Theta \to S^1$ jatkuva kuvaus. Tällöin* $\deg(f \circ j_0) = \deg(f \circ j_1) + \deg(f \circ j_2)$.

Todistus: Lauseen 5.9 nojalla kuvauksella $f \circ j_0 \circ p|I \colon I \to S^1$ on p-nosto $g_0 \colon I \to \mathbb{R}$. Määritellään kuvaus $\eta \colon I \to [-1, 1]$ asettamalla $\eta(x) = 2x - 1$. Yhdistetyllä kuvauksella $f|[-1, 1] \circ \eta \colon I \to S^1$ on Lauseen 5.9 nojalla p-nosto $h \colon I \to \mathbb{R}$. Koska $p(h(0)) = f(\eta(0)) = f(-1) = p(g_0(1/2))$, niin nosto h voidaan valita niin, että $h(0) = g_0(1/2)$. Yhdistetty kuvaus $h_0 = h \circ \eta^{-1} \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ on kuvauksen $f|[-1, 1]$ nosto, sillä $p(h_0(x)) = p(h(\eta^{-1}(x))) = f(\eta(\eta^{-1}(x))) = f(x)$ kaikilla $x \in [-1, 1]$. Lisäksi $h_0(-1) = h(\eta^{-1}(-1)) = h(0) = g_0(1/2)$.

Määritellään kuvauksien $f \circ j_1 \circ p|I$ ja $f \circ j_2 \circ p|I$ nostot g_1 ja $g_2 \colon I \to \mathbb{R}$ nostojen g_0 ja h_0 avulla asettamalla

$$g_1(x) = \begin{cases} g_0(x), & x \in [0, 1/2] \\ h_0(\cos 2\pi x), & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} h_0(\cos 2\pi x), & x \in [0, 1/2] \\ g_0(x), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Kuvaukset g_1 ja g_2 ovat jatkuvia, sillä kuvaukset g_0 ja h_0 ovat jatkuvia, ja kun $x = 1/2$, niin $g_0(1/2) = h_0(-1) = h_0(\cos \pi)$. Kuvaus g_1 on kuvauksen $f \circ j_1 \circ p|I$ nosto, sillä jos $x \in [0, 1/2]$, niin tällöin $f(j_1(p(x))) = f(j_0(p(x))) = p(g_0(x))$, ja jos $x \in [1/2, 1]$, niin tällöin $f(j_1(p(x))) = f(j_1(e^{2\pi i x})) = f(\cos 2\pi x) = p(h_0(\cos 2\pi x))$. Vastaavalla tavalla voidaan varmistaa, että kuvaus g_2 on kuvauksen $f \circ j_2 \circ p|I$ nosto.

Näin siis $\deg(f \circ j_0) = g_0(1) - g_0(0) = g_0(1) - h_0(1) + h_0(1) - g_0(0) = g_0(1) - h_0(\cos 0) + h_0(\cos 2\pi) - g_0(0) = g_2(1) - g_2(0) + g_1(1) - g_1(0) = \deg(f \circ j_2) + \deg(f \circ j_1)$. □

Seuraava määritelmä on tarpeen Lauseen 8.3 muotoilemiseksi.

Määritelmä 8.2. Olkoon A topologisen avaruuden X osajoukko ja olkoot pisteet x_1, $x_2 \in X \setminus A$. Sanotaan, että joukko A *erottaa* pisteet x_1 ja x_2, jos ne kuuluvat joukon $X \setminus A$ eri polkukomponentteihin.

Eilenbergin kriteerion avulla voidaan todistaa seuraava lause, jonka avulla myöhemmin tutkitaan Jordanin käyrän $J \subset \mathbb{R}^2$ komplementin $\mathbb{R}^2 \setminus J$ polkukomponenttien lukumäärää.

Lause 8.3. *Olkoon $g\colon \Theta \to \mathbb{C}$ upotus ja olkoot $a, b \in \mathbb{C} \setminus g\Theta$. Oletetaan, että joukoista gS^1, gU ja gL jotkin kaksi eivät erota pisteitä a ja b. Tällöin myöskään kolmas näistä joukoista ei erota niitä.*

Todistus: Olkoon $f\colon g\Theta \to S^1$, $f(z) = N\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$, kuten Lauseessa 7.7. Lauseen 7.7 mukaan joukko gS^1 ei erota pisteitä a ja b, jos ja vain jos rajoittuma $f|gS^1$ on nollahomotooppinen. Osoitetaan, että rajoittuma $f|gS^1$ on nollahomotooppinen jos ja vain jos sitä vastaavan kuvauksen $f \circ g \circ j_0\colon S^1 \to S^1$ aste on 0:

Oletetaan, että $f|gS^1$ on nollahomotooppinen. Tällöin Lauseen 5.13 nojalla sillä on p-nosto $\tilde{f}\colon gS^1 \to \mathbb{R}$. Yhdistetty kuvaus $\tilde{f} \circ g \circ j_0\colon S^1 \to \mathbb{R}$ on kuvauksen $f \circ g \circ j_0\colon S^1 \to S^1$ p-nosto, sillä $p \circ \tilde{f} \circ g \circ j_0 = f \circ g \circ j_0$. Näin Lauseen 5.11 nojalla kuvauksen $f \circ g \circ j_0$ aste on nolla.

Oletetaan, että $\deg(f \circ g \circ j_0) = 0$. Lauseen 5.11 nojalla kuvauksella $f \circ g \circ j_0\colon S^1 \to S^1$ on tällöin p-nosto $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$. Kuvaukset g ja j_0 ovat upotuksia, joten voidaan määritellä yhdistetty kuvaus $h \circ j_0^{-1} \circ g^{-1}\colon gS^1 \to \mathbb{R}$. Tämä on kuvauksen $f|gS^1$ nosto, sillä $p \circ h \circ j_0^{-1} \circ g^{-1} = f \circ g \circ j_0 \circ j_0^{-1} \circ g^{-1} = f$. Siis kuvaus $f|gS^1$ on Lauseen 5.13 nojalla nollahomotooppinen.

Näin saadaan pääteltyä, että joukko gS^1 ei erota pisteitä a ja b, jos ja vain jos $\deg(f \circ g \circ j_0) = 0$. Vastaavalla tavalla voidaan päätellä, että joukko gU ei erota pisteitä a ja b, jos ja vain jos $\deg(f \circ g \circ j_1) = 0$, ja että joukko gL ei erota pisteitä a ja b, jos ja vain jos $\deg(f \circ g \circ j_2) = 0$.

Yhdistetty kuvaus $f \circ g\colon \Theta \to S^1$ on jatkuva, joten Lauseen 8.1 nojalla $\deg(f \circ g \circ j_0) = \deg(f \circ g \circ j_1) + \deg(f \circ g \circ j_2)$. Oletuksen mukaan joukoista gS^1, gU ja gL jotkin kaksi eivät erota pisteitä a ja b, eli kaksi näistä asteista on 0. Yhtälöstä nähdään, että tällöin myös kolmannen asteen täytyy olla 0. Tämä taas tarkoittaa, ettei myöskään kolmas joukko joukoista gS^1, gU ja gL erota pisteitä a ja b. □

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että Jordanin käyrä $J \subset \mathbb{R}^2$ on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ jokaisen polkukomponentin reuna. Todistus nojautuu erityisesti luvun 7 Lauseeseen 7.8.

Lause 8.4. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Tällöin joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ jokaisen polkukomponentin reuna on J.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X jokin joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ polkukomponentti. Lauseen 7.2 nojalla joukko $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on lokaalisti polkuyhtenäinen, sillä J on suljettu. Lauseen 7.3 mukaan X on avoin ja Lauseen 7.5 mukaan $X \cup J$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Näin $\partial X \subset J$.

Osoitetaan vielä, että $J \subset \partial X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $x \in J$. Jordanin käyrä J on homeomorfinen ympyrän S^1 kanssa, joten on olemassa kaari $A \subset J \cap B(x, \varepsilon)$, joka on avoin joukossa J ja sisältää pisteen x. Joukko $K = J \setminus A$ on suljettu joukossa J ja homeomorfinen välin I kanssa. Lauseen 7.8 mukaan joukko $\mathbb{R}^2 \setminus K$ on polkuyhtenäinen. On siis olemassa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus K$ polku $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus K$, joka yhdistää pisteen $x_0 \in X$ pisteeseen $x \in A$. Kuvajoukko αI on yhtenäinen ja kohtaa sekä joukon X että joukon $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus X$, joten se kohtaa reunan ∂X. Olkoon $y \in \alpha I \cap \partial X$. Edellä todettiin, että $\partial X \subset J$, joten $y \in J$. Kuvajoukko $\alpha I \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$, joten y ei voi kuulua kaareen K vaan sen täytyy kuulua kaareen A. Siis $y \in A \cap \partial X$. Kaari A sisältyy kuulaan $B(x, \varepsilon)$, joten joukon X reuna kohtaa kuulan $B(x, \varepsilon)$. Siten $d(x, \partial X) < \varepsilon$. Tämä pätee olipa $\varepsilon > 0$ miten pieni tahansa, joten täytyy olla $d(x, \partial X) = 0$. Reuna ∂X on suljettu, joten näin $x \in \partial X$. Siis $J \subset \partial X$. □

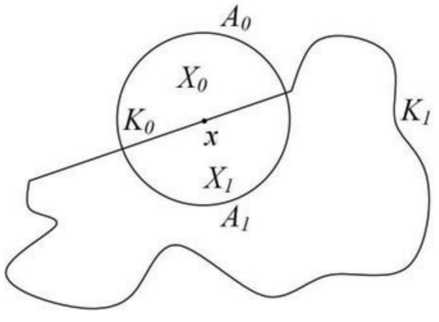
Siirrytään tarkastelemaan tason Jordanin käyrää, joka sisältää janan. Lauseiden 8.3 ja 8.4 avulla voidaan osoittaa, että tällöin Jordanin käyrän komplementilla on täsmälleen kaksi polkukomponenttia.

Lause 8.5. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä, joka sisältää janan. Tällöin joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi polkukomponenttia.*

Todistus: Olkoon Jordanin käyrän sisältämä jana K. Olkoon $x \in K$ jokin piste, joka ei ole janan K päätepiste. Olkoon $0 < r < d(x, J \setminus K)$. Olkoon $K_0 = K \cap \bar{B}(x, r)$ ja $K_1 = J \setminus \mathrm{int}_J K_0$, missä $\mathrm{int}_J K_0$ tarkoittaa janan K_0 sisäpisteitä joukossa J. Joukot K_0 ja K_1 ovat siis molemmat suljettuja joukossa J.

Joukolla $B(x, r) \setminus K_0$ on kaksi komponenttia, olkoot ne X_0 ja X_1. Joukko $S(x, r) \setminus K_0$ muodostuu vastaavasti kahdesta kaaresta A_0 ja A_1. Voidaan olettaa, että $\partial X_0 = A_0 \cup K_0$ ja $\partial X_1 = A_1 \cup K_0$ (Kuva 25). Lauseen 8.4 mukaan jokaisen joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ polkukomponentin reuna on J. Näin jokainen tällainen polkukomponentti kohtaa välttämättä kuulan $B(x, r)$ ja sisältää joko polkuyhtenäisen joukon X_0 tai X_1. Siis joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on enintään kaksi polkukomponenttia.

Osoitetaan vielä, että polkukomponentteja on vähintään kaksi, mikä todistaa väitteen. Olkoot $x_0 \in X_0$ ja $x_1 \in X_1$. Osoitetaan, että Jordanin



KUVA 25

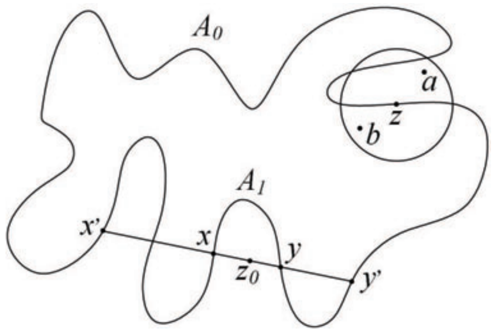
käyrä J erottaa pisteet x_0 ja x_1: On olemassa sellainen homeomorfismi $g\colon \Theta \to J \cup A_0$, että $gS^1 = A_0 \cup K_1$, $gU = A_0 \cup K_0$ ja $gL = K_0 \cup K_1 = J$. Joukko $gS^1 = A_0 \cup K_1$ ei kohtaa kuulaa $B(x,r)$ eikä siten erota pisteitä x_0 ja x_1. Joukko $gU = A_0 \cup K_0$ puolestaa erottaa pisteet x_0 ja x_1. Näin Lauseen 8.3 nojalla myös joukko $gL = J$ erottaa pisteet x_0 ja x_1, eli ne kuuluvat joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ eri polkukomponentteihin. Siis polkukomponentteja on vähintään kaksi. $\square$

Nyt voidaan muotoilla ja todistaa varsinainen Jordanin käyrälause. Todistuksessa yleistetään aluksi Lauseen 8.5 tulos koskemaan jokaista tason Jordanin käyrää $J \subset \mathbb{R}^2$ eli osoitetaan, että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on aina täsmälleen kaksi polkukomponenttia. Sen jälkeen osoitetaan, että kyseiset polkukomponentit ovat joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentit. Lauseen 8.4 nojalla Jordanin käyrä on niiden kummankin reuna.

Lause 8.6 (Jordanin käyrälause)**.** *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Tällöin joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on kaksi komponenttia, joiden molempien reuna on J.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä. Osoitetaan aluksi, että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi polkukomponenttia. Olkoot x' ja $y' \in J$. Jos jana $[x', y']$ sisältyy kokonaisuudessaan Jordanin käyrään J, niin kysymyksessä on Lauseen 8.5 tilanne, jossa väite on jo todistettu. Voidaan siis olettaa, että on olemassa tämän janan piste z_0, joka ei kuulu käyrään J. Joukko $J \cap [x', z_0]$ on kompakti ja kuvaus $d\colon z \mapsto |z - z_0|$ on jatkuva. Näin on olemassa piste $x \in J \cap [x', z_0]$, jossa kuvaus d saa pienimmän arvonsa joukossa $J \cap [x', z_0]$. Tällöin $]x, z_0] \subset \mathbb{R}^2 \setminus J$. Piste $z_0 \notin J \cap [x', z_0]$, joten $x \neq z_0$. Olkoon vastaavasti $y \in J \cap [z_0, y']$ se piste, jossa kuvaus d saa pienimmän arvonsa joukossa $J \cap [z_0, y']$. Tällöin $[z_0, y[\subset \mathbb{R}^2 \setminus J$. Piste $z_0 \notin J \cap [z_0, y']$, joten $y \neq z_0$. Pisteet x ja y jakavat Jordanin käyrän J kahdeksi kaareksi A_0 ja A_1, joiden molempien päätepisteet ne ovat (Kuva 26). Lisäksi $A_0 \cap]x, y[= \emptyset = A_1 \cap]x, y[$.

Olkoon $z \in A_0$ ja olkoon $0 < r < d(z, A_1 \cup [x, y])$. Näin $B(z, r) \cap A_1 = \emptyset = B(z, r) \cap [x, y]$. Tarkastellaan joukkoa $A_0 \cup [x, y]$, joka on Jordanin käyrä. Se sisältää janan $[x, y]$, joten Lauseen 8.5 perusteella tiedetään,



KUVA 26

että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus (A_0 \cup [x,y])$ on kaksi polkukomponenttia. Lauseen 8.4 mukaan $A_0 \cup [x,y]$ on joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (A_0 \cup [x,y])$ jokaisen polkukomponentin reuna, joten jokainen joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (A_0 \cup [x,y])$ polkukomponentti kohtaa kuulan $B(z,r)$. Näin voidaan valita pisteet a ja $b \in B(z,r)$ niin, että ne kuuluvat joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (A_0 \cup [x,y])$ eri polkukomponentteihin. On olemassa sellainen homeomorfismi $g\colon \Theta \to J \cup [x,y]$, että $gS^1 = J$, $gU = A_0 \cup [x,y]$ ja $gL = [x,y] \cup A_1$. Joukko $gU = A_0 \cup [x,y]$ erottaa siis pisteet a ja b, kun taas joukko $gL = [x,y] \cup A_1$ ei kohtaa kuulaa $B(z,r)$ eikä siten erota pisteitä a ja $b \in B(z,r)$. Näin Lauseen 8.3 nojalla myös joukko $gS^1 = J$ erottaa pisteet a ja b. Siis joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on ainakin kaksi polkukomponenttia.

Osoitetaan, että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on enintään kaksi polkukomponenttia. Tehdään vastaoletus, että sillä on ainakin kolme polkukomponenttia. Lauseen 8.4 mukaan jokainen joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ polkukomponentti kohtaa kuulan $B(z,r)$, joten voidaan valita pisteet a, b ja $c \in B(z,r)$ niin, että jokainen niistä kuuluu eri polkukomponenttiin. Kaksi näistä pisteistä kuitenkin välttämättä kuuluu joukon $\mathbb{R}^2 \setminus (A_0 \cup [x,y])$ samaan polkukomponenttiin, ja voidaan olettaa, että ne ovat pisteet b ja c. Siis joukko $gU = A_0 \cup [x,y]$ ei erota pisteitä b ja c. Myöskään joukko $gL = [x,y] \cup A_1$ ei erota niitä, sillä se ei edes kohtaa kuulaa $B(z,r)$. Näin Lauseen 8.3 nojalla myöskään joukko $gS^1 = J$ ei erota niitä, vaan ne kuuluvat joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ samaan polkukomponenttiin. Tämä on ristiriita, joten vastaoletuksen täytyy olla väärä. Siis joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on enintään kaksi polkukomponenttia.

Joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on siis täsmälleen kaksi polkukomponenttia. Kumpikin polkukomponentti on yhtenäinen, joten joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on enintään kaksi komponenttia. Osoitetaan vielä, että sillä on vähintään kaksi komponenttia: Lauseen 7.2 nojalla joukko $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on lokaalisti polkuyhtenäinen, sillä J on kompakti. Jos joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ olisi vain yksi komponentti, eli se olisi yhtenäinen, niin Lauseen 7.4 nojalla se olisi polkuyhtenäinen. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä tiedetään, että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on kaksi polkukomponenttia. Näin on siis saatu osoitettua, että joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on kaksi komponenttia, jotka ovat myös sen polkukomponentit, ja Lauseen 8.4 nojalla molempien reuna on J. $\square$

9. Schönfliesin lause monikulmioille

Tämän luvun tavoite on todistaa monikulmioita koskeva Schönfliesin lause. Sen mukaan jokainen tason kahden monikulmion J ja J' välinen homeomorfismi $f\colon J \to J'$ voidaan jatkaa koko tason homeomorfismiksi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Tämän ja seuraavan luvun lähteenä on käytetty kirjaa [3].

Aloitetaan tarkastelemalla n-ulotteista euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ k-ulotteinen vektorialiavaruus ($k < n$). Olkoon $z \in \mathbb{R}^n$. Merkitään $H = z + E = \{z + x : x \in E\}$. Tällöin joukko H on *k-ulotteinen affiini aliavaruus*. Jos dimensio $k = 1$, niin joukko H on suora, ja jos $k = 2$, niin joukko H on taso.

Olkoon $F \subset \mathbb{R}^n$. Tarkastellaan kaikkia avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiineja aliavaruuksia, joiden dimensio $k < n$. Oletetaan, että jokainen tällainen affiini aliavaruus sisältää enintään $k + 1$ kappaletta joukon F pisteitä. Tällöin sanotaan, että joukon F pisteet ovat *affiinisti riippumattomia* avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Siis jos $F \subset \mathbb{R}^2$, niin joukon F pisteet ovat affiinisti riippumattomia, jos niistä mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Vastaavasti, jos $F \subset \mathbb{R}^3$, niin joukon F pisteet ovat affiinisti riippumattomia, jos niistä mitkään neljä eivät ole samassa tasossa.

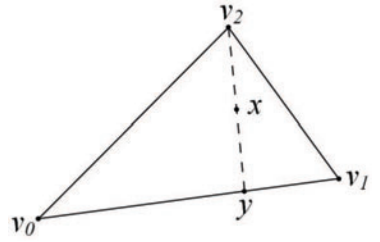
Joukon $F \subset \mathbb{R}^n$ *konveksi verho* on kaikkien sellaisten konveksien joukkojen leikkaus, jotka sisältävät joukon F. Se on siis pienin konveksi joukko, johon joukko F sisältyy.

Näiden käsitteiden avulla voidaan määritellä tässä luvussa keskeinen käsite *k-ulotteinen simpleksi*:

Määritelmä 9.1. Olkoon $F = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ joukko affiinisti riippumattomia pisteitä ($k \leq n$). Joukon F konveksi verho on *k-ulotteinen simpleksi* tai lyhyemmin *k-simpleksi* $\sigma^k = v_0 v_1 \ldots v_k$. Joukon F pisteet ovat simpleksin σ^k *kärjet.* Jos $G \subset F$, niin joukon G konveksi verho τ on myös simpleksi ja sanotaan, että se on simpleksin σ^k *tahko* tai tarkemmin *j-tahko,* jos τ on j-simpleksi. Tällöin merkitään $\tau < \sigma^k$. Jos $\tau < \sigma^k$ on 1-tahko, niin sanotaan myös, että τ on simpleksin σ^k *särmä.*

Havaitaan, että nollaulotteinen simpleksi on piste, yksiulotteinen simpleksi on jana, kaksiulotteinen simpleksi on kolmio ja kolmiulotteinen simpleksi on tetraedri. Tarkastellaan seuraavaksi tarkemmin kaksiulotteisia simpleksejä.

Lause 9.2. *Olkoon $\{v_0, v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ joukko affiinisti riippumattomia pisteitä. Tällöin $v_0 v_1 v_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \sum \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$.*



KUVA 27

Todistus: Osoitetaan aluksi, että joukko $V = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \sum \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$ on kolmio K, jonka kärkipisteet ovat v_0, v_1 ja v_2. Olkoon $x \in K$. Kuvan 27 merkinnöillä $x = v_0 + a\overrightarrow{v_0 v_1} + b\overrightarrow{y v_2}$, missä $y \in [v_0, v_1]$ ja $0 \leq a, b \leq 1$. Välivaiheiden kautta tästä saadaan $x = v_0 + a(v_1 - v_0) + b(a(v_0 - v_1) + v_2 - v_0) = (1-a)(1-b)v_0 + a(1-b)v_1 + bv_2$. Merkitään $\alpha_0 = (1-a)(1-b)$, $\alpha_1 = a(1-b)$ ja $\alpha_2 = b$, jolloin $\alpha_i \geq 0$ jokaisella $i \in \{1, 2, 3\}$ ja $\sum \alpha_i = 1$. Siis $x \in V$ eli $K \subset V$.

Olkoon sitten $v \in V$. Tällöin $v = \sum \alpha_i v_i$. Merkitään $b = \alpha_2$ ja $a = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_0}$. Tällöin $0 \leq a, b \leq 1$ ja lisäksi $(1-a)(1-b) = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_0$ ja $a(1-b) = \alpha_1$. Näin ollen $v = \sum \alpha_i v_i = v_0 + a\overrightarrow{v_0 v_1} + b\overrightarrow{y v_2}$, missä $y \in [v_0, v_1]$. Siis $v \in K$ eli $V \subset K$.

Kolmio $V = K$ on konveksi ja sisältää joukon $\{v_0, v_1, v_2\}$, joten se sisältää myös simpleksin $\sigma = v_0 v_1 v_2$. Tehdään vastaoletus, että $\sigma \subsetneq V$. Tällöin on siis olemassa piste $v \in V \setminus \sigma$. Simpleksi σ on konveksi, joten sen täytyy sisältää janat $[v_i, v_j]$ kaikilla $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Näin piste v on kolmion V sisäpiste. Pisteiden v_2 ja v kautta kulkeva suora leikkaa janan $[v_0, v_1]$ jossain pisteessä w. Koska $v_2, w \in \sigma$ ja σ on konveksi, niin tällöin myös $[v_2, w] \subset \sigma$, erityisesti $v \in \sigma$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletettiin, että $v \notin \sigma$. Siis vastaoletus on väärä ja $\sigma = V$. □

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että tason jokaisen 2-simpleksin kärkien avulla voidaan muodostaa kanta vektoriavaruudelle $\mathbb{R}^2$. Tätä tulosta tarvitaan Lauseessa 9.4.

Lause 9.3. *Olkoon $\{v_0, v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ joukko affiinisti riippumattomia pisteitä. Tällöin pisteet $v_1' = v_1 - v_0$ ja $v_2' = v_2 - v_0$ ovat lineaarisesti riippumattomat ja muodostavat siten vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan.*

Todistus: Pisteet v_0, v_1 ja v_2 ovat oletuksen mukaan affiinisti riippumattomia avaruudessa $\mathbb{R}^2$, joten ne ovat kolme eri pistettä. Näin $v_1' \neq 0 \neq v_2'$. Tehdään vastaoletus, että pisteet v_1' ja v_2' ovat lineaarisesti riippuvat. Tällöin $v_1' = av_2'$ jollain $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Näin $v_1 - v_0 = a(v_2 - v_0)$ eli $v_1 = v_0 + a\overrightarrow{v_0 v_2}$, joten piste v_1 on pisteiden v_0 ja v_2 kautta kulkevalla suoralla. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletuksen mukaan pisteet v_0, v_1 ja v_2 ovat affiinisti riippumattomia. Siis pisteet v_1' ja v_2' ovat lineaarisesti riippumattomat. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on kaksi, joten pisteet v_1' ja v_2' muodostavat sen kannan. □

Jatketaan tason 2-simpleksien tarkastelua. Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa tason $\mathbb{R}^2$ homeomorfismi, joka kuvaa simpleksin toiseksi simpleksiksi niin, että kärjet kuvautuvat kärjiksi.

Lause 9.4. *Olkoot $\sigma^2 = v_0v_1v_2$ ja $\tau^2 = w_0w_1w_2$ 2-simpleksejä avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $f(v_i) = w_i$ ja $f\sigma^2 = \tau^2$.*

Todistus: Kuvaukset $g_1\colon x \mapsto x - v_0$ ja $g_2\colon x \mapsto x + w_0$ ovat homeomorfismeja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Merkitään $v_i' = v_i - v_0$ ja $w_i' = w_i - w_0$ kun $i = 1, 2$. Lauseen 9.3 nojalla pisteet v_i' muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan, samoin pisteet w_i'. On siis olemassa yksi sellainen lineaarikuvaus $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h(v_i') = w_i'$ kun $i = 1, 2$. Lisäksi $h(\alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2') = \alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2' = 0$ jos ja vain jos $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$, joten lineaarikuvauksen h ydin $\mathrm{Ker}(h) = \{0\}$ eli kuvaus h on injektio. Tällöin lineaarikuvaus h on homeomorfismi, mikä on todistettu kirjassa [6], Lause 15.13. Yhdistetty kuvaus $f = g_2 \circ h \circ g_1$ on siis homeomorfismi. Lisäksi kun $i \in \{1, 2\}$, niin $f(v_i) = g_2(h(g_1(v_i))) = g_2(h(v_i')) = g_2(w_i') = w_i$, ja $f(v_0) = g_2(h(g_1(v_0))) = g_2(h(0)) = g_2(0) = w_0$.

Lauseen 9.2 nojalla $\sigma^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = \sum \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$ ja $\tau^2 = \{w \in \mathbb{R}^2 : w = \sum \alpha_i w_i, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$. Lisäksi $f(\sum \alpha_i v_i) = g_2(h(\sum \alpha_i v_i - v_0)) = g_2(h(0 + \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2')) = g_2(\alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2') = \alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2' + w_0 = \alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2' + \alpha_1 w_0 + \alpha_2 w_0 + \alpha_3 w_0 = \sum \alpha_i w_i$. (Tässä on huomattava, että $\sum \alpha_i = 1$.) Siis $f\sigma^2 = \tau^2$. □

Lauseesta 9.4 seuraa erityisesti, että kaikki tason 2-simpleksit ovat keskenään homeomorfisia:

Lause 9.5. *Olkoot $\sigma^2 = v_0v_1v_2$ ja $\tau^2 = w_0w_1w_2$ 2-simpleksejä avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon \sigma^2 \to \tau^2$, että $h(v_i) = w_i$.*

Todistus: Lauseen 9.4 nojalla on olemassa homeomorfismi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolla $f(v_i) = w_i$ ja $f\sigma^2 = \tau^2$. Olkoon $h\colon \sigma^2 \to \tau^2$ homeomorfismin f rajoittuman $f|\sigma^2$ määrittelemä kuvaus. Lemman 2.5 nojalla se on homeomorfismi. Lisäksi $h(v_i) = w_i$. □

Siirrytään tarkastelemaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ simpleksien kokoelmia. Aloitetaan asettamalla seuraava määritelmä:

Määritelmä 9.6. Kokoelma Δ avaruuden $\mathbb{R}^n$ simpleksejä on *kompleksi,* jos seuraavat ehdot toteutuvat

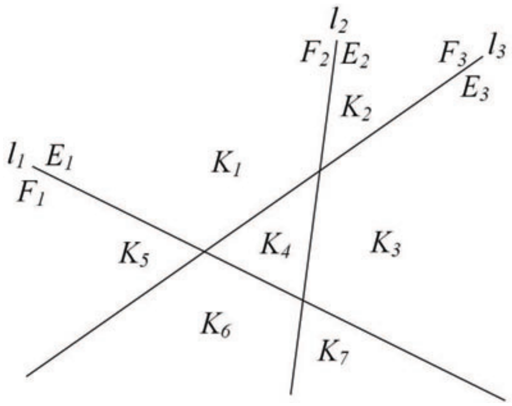
(1) Jos $\sigma \in \Delta$, niin myös jokainen simpleksin σ tahko $\tau \in \Delta$.
(2) Jos σ, $\tau \in \Delta$ ja $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, niin $\sigma \cap \tau$ on sekä simpleksin σ että simpleksin τ tahko.
(3) Jokainen simpleksi $\sigma \in \Delta$ sisältyy avoimeen joukkoon U, joka kohtaa vain äärellisen määrän kokoelman Δ jäseniä.

Jos Δ on kompleksi, niin merkinnällä $|\Delta|$ tarkoitetaan siihen kuuluvien simpleksien yhdistettä. Siis $|\Delta| = \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma \subset \mathbb{R}^n$. Sanotaan, että joukko $|\Delta|$ on *monitahokas*. Jos kompleksi Δ on äärellinen eli siihen kuuluu äärellisen monta simpleksiä, niin $|\Delta|$ on *äärellinen monitahokas*. Sanotaan myös, että kompleksi Δ on joukon $|\Delta|$ *kolmiointi*.

Jordanin käyrälauseen nojalla tiedetään, että jos $J \subset \mathbb{R}^2$ on monikulmio, niin joukolla $\mathbb{R}^2 \setminus J$ on täsmälleen kaksi komponenttia, joista toinen on rajoitettu ja toinen on rajoittamaton. Olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Jatkossa komponenttia X kutsutaan myös monikulmion J *sisäpuoleksi*. Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että joukko $\bar{X} = X \cup J$ on äärellinen monitahokas.

Lause 9.7. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ monikulmion J sisäpuoli. Tällöin on olemassa sellainen äärellinen kompleksi $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, että $|\Delta| = \bar{X}$. Siis $\bar{X}$ on äärellinen monitahokas ja Δ on sen kolmiointi.*

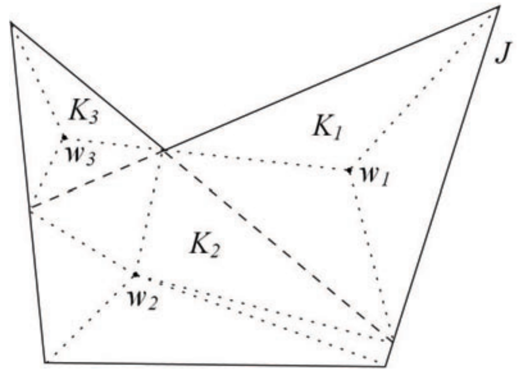
Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio. Olkoot $l_1, \ldots, l_n$ monikulmion J sivujen määräämät suorat. Jokainen suora l_i jakaa tason $\mathbb{R}^2$ kahdeksi suljetuksi puolitasoksi E_i ja F_i, joiden molempien reuna se on (Kuva 28). Tarkastellaan leikkauksia $\cap_{i=1}^n Y_i$, missä $Y_i \in \{E_i, F_i\}$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$. Näitä on 2^n kappaletta, joista osa voi olla tyhjiä. Jokainen leikkausjoukko on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu.



KUVA 28

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen epätyhjä leikkausjoukko on konveksi: Olkoot x,$y \in \cap_{i=1}^n Y_i$. Tällöin pisteet x ja y kuuluvat joukkoon Y_i jokaisella indeksillä i. Joukot Y_i ovat suljettuja puolitasoja, joten jana $[x, y] \subset Y_i$ jokaisella indeksillä i. Näin $[x, y] \subset \cap_{i=1}^n Y_i$, eli leikkaus $\cap_{i=1}^n Y_i$ on konveksi.

Näin suorat l_i jakavat tason $\mathbb{R}^2$ äärellisen moneksi suljetuksi ja konveksiksi joukoksi $K_1, \ldots, K_m$, joiden jokaisen reuna sisältyy suorien l_i yhdisteeseen; tarkemmin sanottuna $\partial K_j = K_j \cap (\cup_{i=1}^n l_i)$ jokaisella indeksillä j. Olkoon $j \in \{1, \ldots, m\}$. Tarkastellaan seuraavaksi leikkausta $K_j \cap \bar{X}$. Jos se on epätyhjä, on kaksi vaihtoehtoa: joko $K_j \subset \bar{X}$

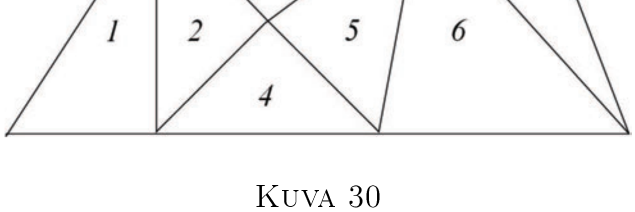


KUVA 29

tai $K_j \cap \bar{X} \subset J$. Tästä voidaan päätellä, että joukko $\bar{X}$ on yhdiste niistä joukoista K_j, jotka sisältyvät joukkoon $\bar{X}$. Voidaan siis merkitä $\bar{X} = \cup_{j=1}^{k} K_j$. Jokaisella $1 \leq j \leq k$ joukko ∂K_j muodostuu äärellisestä määrästä janoja eli 1-simpleksejä. Voidaan olettaa, että jos kahdella tällaisella janalla on sama päätepiste, niin nämä janat ovat erisuuntaisia. Jokaisella $1 \leq j \leq k$ valitaan piste $w_j \in K_j \setminus \partial K_j$ ja jokaista 1-simpleksiä $vv' \subset \partial K_j$ kohti muodostetaan 2-simpleksi $w_j vv'$ kuten kuvassa 29. Kaikkien tällaisten 2-simpleksien kokoelma on haluttu kompleksi Δ. $\square$

Jos $J \subset \mathbb{R}^2$ on monikulmio ja X sen sisäpuoli, niin Lauseen 9.7 mukaan on aina olemassa sellainen äärellinen kompleksi $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, että $|\Delta| = \bar{X}$. Voidaan siis asettaa seuraava määritelmä, jonka avulla voidaan kuvata simpleksin sijaintia monikulmion määräämässä monitahokkaassa:

Määritelmä 9.8. Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoon X sen sisäpuoli. Olkoon Δ monitahokkaan $\bar{X}$ kolmiointi. Oletetaan, että $\sigma^2 \in \Delta$ ja että joukko $\sigma^2 \cap J$ koostuu yhdestä tai kahdesta simpleksin σ^2 särmästä. Tällöin sanotaan, että simpleksi σ^2 on *vapaa* kompleksissa Δ. Voidaan myös sanoa, että simpleksi σ^2 on *vapaa.*



KUVA 30

Kuvassa 30 siis simpleksit 1,3,4 ja 7 ovat vapaita mutta simpleksit 2, 5 ja 6 eivät ole vapaita. Yleisemmin tason monikulmion määräämän monitahokkaan kolmiointiin, johon kuuluu ainakin kaksi simpleksiä, kuuluu aina ainakin kaksi vapaata simpleksiä. Tämä osoitetaan seuraavassa lauseessa:

Lause 9.9. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoon X sen sisäpuoli. Olkoon Δ monitahokkaan $\bar{X}$ kolmiointi. Oletetaan, että kompleksiin Δ kuuluu ainakin kaksi 2-simpleksiä. Tällöin siihen kuuluu vähintään kaksi vapaata 2-simpleksiä.*

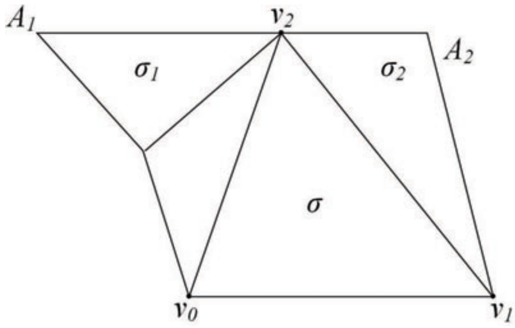
Todistus: Todistetaan väite induktiolla kompleksiin kuuluvien simpleksien lukumäärän suhteen. Jos kompleksiin Δ kuuluu tasan kaksi 2-simpleksiä, niin ne ovat vapaita. Tehdään induktio-oletus, jonka mukaan väite pätee jokaisella monikulmiolla, jonka määräämän monitahokkaan kolmioinnissa on vähemmän simpleksejä kuin kompleksissa Δ. Oletetaan, että kompleksiin Δ kuuluu ainakin kolme 2-simpleksiä ja osoitetaan, että väite pätee myös tässä tapauksessa.

Jos monikulmio J muodostuu vain yhden 2-simpleksin särmistä, niin J on kolmio ja kompleksiin Δ kuuluu vain yksi simpleksi. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa, joten monikulmio J täytyy muodostua vähintään kahden 2-simpleksin särmistä. Kompleksiin Δ kuuluu siis vähintään kaksi sellaista 2-simpleksiä, joiden jokin särmä sisältyy monikulmioon J. Olkoot nämä simpleksit σ ja τ. Jos ne molemmat ovat vapaita, väite pätee. Oletetaan, että simpleksi σ ei ole vapaa. Sen jokin särmä sisältyy monikulmioon J, joten voidaan olettaa, että $\sigma = v_0v_1v_2$ ja $v_0v_1 \subset J$. Tarkastellaan leikkausta $v_iv_2 \cap J$, missä $i \in \{0,1\}$. Kompleksin määritelmän ehdosta (2) johtuen joko $v_iv_2 \cap J = v_iv_2$ tai $v_iv_2 \cap J \subset \{v_i, v_2\}$. Simpleksi σ ei ole vapaa, joten $v_0v_2 \not\subset J$, $v_1v_2 \not\subset J$ ja $\sigma \cap J \neq v_0v_1$. Tällöin välttämättä $\sigma \cap J = v_0v_1 \cup \{v_2\}$.

Pisteet v_0 ja v_2 jakavat monikulmion J kahdeksi murtoviivaksi A_1 ja A_2. Olkoon X_i monikulmion $A_i \cup v_0v_2$ sisäpuoli, $i \in \{1,2\}$. Tällöin $\bar{X} = \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2$. Olkoon $\Lambda_i = \{\rho \in \Delta : \rho \subset \bar{X}_i\}$, $i \in \{1,2\}$. Siis Λ_i on kompleksi, johon kuuluvat ne kompleksin Δ simpleksit, jotka sisältyvät joukkoon $\bar{X}_i$. Voidaan olettaa, että simpleksi σ tahkoineen kuuluu kompleksiin Λ_2 (Kuvat 31 ja 32).

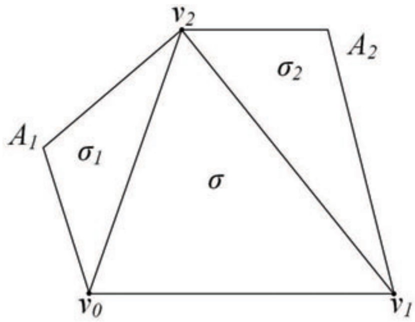
Oletetaan aluksi, että sekä kompleksiin Λ_1 että kompleksiin Λ_2 kuuluu ainakin kaksi simpleksiä (Kuva 31). Tällöin niihin kumpaankin kuuluu induktio-oletuksen nojalla kaksi vapaata 2-simpleksiä. Voidaan siis valita sellaiset vapaat 2-simpleksit $\sigma_1 \in \Lambda_1$ ja $\sigma_2 \in \Lambda_2$, että $v_0v_2 \notin \sigma_1$ ja $\sigma_2 \neq \sigma$. Näin simpleksit σ_1 ja σ_2 ovat vapaita myös kompleksissa Δ.

Oletetaan sitten, että kompleksissa Λ_1 on vain yksi simpleksi (Kuva 32). Olkoon se σ_1. Havaitaan, että simpleksi σ_1 on vapaa kompleksissa Δ. Kompleksiin Λ_2 puolestaan kuuluu välttämättä ainakin kaksi



KUVA 31

simpleksiä: jos näin ei olisi, niin $v_1v_2 \subset J$ ja simpleksi σ olisi vapaa, mikä on ristiriita. Induktio-oletuksen nojalla kompleksiin Λ_2 kuuluu siis kaksi vapaata 2-simpleksiä kuten edellä. Näin voidaan valita sellainen vapaa 2-simpleksi $\sigma_2 \in \Lambda_2$, että $\sigma_2 \neq \sigma$. Simpleksit σ_1 ja σ_2 ovat siis vapaita kompleksissa Δ. □

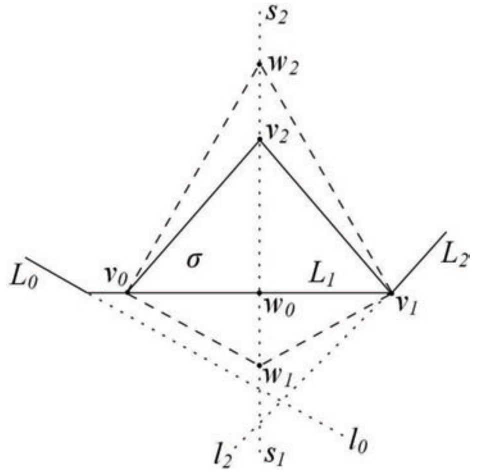


KUVA 32

Jatketaan tason monikulmioiden määräämien monitahokkaiden tarkastelua. Tavoitteena on seuraavaksi osoittaa, että on olemassa tason $\mathbb{R}^2$ homeomorfismi, joka kuvaa tällaisen monitahokkaan 2-simpleksiksi. Tämä todistetaan Lauseessa 9.11. Todistuksessa tarvitaan seuraavaa tulosta:

Lause 9.10. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja olkoon X sen sisäpuoli. Olkoon Δ monitahokkaan $\bar{X}$ kolmiointi. Oletetaan, että kompleksiin Δ kuuluu vapaa 2-simpleksi $\sigma = v_0v_1v_2$. Oletetaan, että joko $\sigma \cap J = v_0v_1$ tai $\sigma \cap J = v_0v_2 \cup v_2v_1$. Tällöin on olemassa sellaiset pisteet $w_0 \in v_0v_1$, w_1 ja w_2 kuten kuvissa 33 ja 34, että $(v_0w_1v_1 \cup v_0w_2v_1) \cap J = \sigma \cap J$.*

Todistus: Olkoon $\sigma = v_0v_1v_2 \in \Delta$ vapaa simpleksi. Oletuksen mukaan joko $\sigma \cap J = v_0v_1$ tai $\sigma \cap J = v_0v_2 \cup v_2v_1$, mistä seuraa, että $\sigma \subsetneq X$. Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa $\sigma \cap J = v_0v_1$ (Kuva 33). Monikulmio J koostuu äärellisen monesta janasta $L_0, \ldots, L_{n-1}$, $n \geq 3$. Voidaan olettaa, että särmä v_0v_1 sisältyy janaan L_1. Joukko



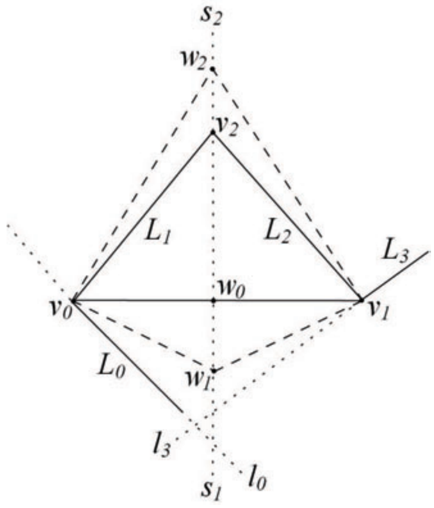
KUVA 33

$K = \cup\{L_i : 3 \leq i \leq n-1\}$ on joko tyhjä joukko tai murtoviiva. Jos $K = \emptyset$, olkoon $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,\sigma) < 1\}$. Jos $K \neq \emptyset$, olkoon $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x,\sigma) < \frac{1}{2}d(\sigma,K)\}$. Etäisyys $d(\sigma,K) > 0$, sillä K ja σ ovat erilliset kompaktit joukot. Joukko U on siis kummassakin tapauksessa simpleksin σ ympäristö, joka ei kohtaa joukkoa K. Olkoon w_0 särmän v_0v_1 keskipiste. Tarkastellaan pisteiden w_0 ja v_2 kautta kulkevaa suoraa s. Olkoon $s_1 \subset s$ se pisteestä w_0 alkava puolisuora, joka pisteen w_0 jokaisessa ympäristössä kohtaa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{X}$. Olkoon vastaavasti $s_2 \subset s$ se pisteestä v_2 alkava puolisuora, joka pisteen v_2 jokaisessa ympäristössä kohtaa joukon $X \setminus \sigma$. Olkoon l_0 janan L_0 määräämä suora ja olkoon l_2 vastaavasti janan L_2 määräämä suora.

Tarkastellaan puolisuoraa s_1. On kaksi mahdollisuutta: joko $s_1 \cap l_0 = \emptyset = s_1 \cap l_2$ tai $s_1 \cap (l_0 \cup l_2) \neq \emptyset$. Ensimmäisessä tapauksessa valitaan jokin piste $w_1 \in s_1 \cap U$. Jälkimmäisessä tapauksessa leikkausjoukkoon $s_1 \cap (l_0 \cup l_2)$ kuuluu enintään kaksi pistettä, joten pisteeksi $w_1 \in s_1 \cap U$ voidaan valita sellainen piste, että se on lähempänä pistettä w_0 kuin kumpikaan leikkausjoukon pisteistä. Tällöin $[w_1, v_i] \cap J = \{v_i\}$, kun $i \in \{0,1\}$. Siten $v_0w_1v_1 \cap J = v_0v_1 = \sigma \cap J$.

Tarkastellaan puolisuoraa s_2. Jälleen joko $s_2 \cap l_0 = \emptyset = s_2 \cap l_2$ tai $s_2 \cap (l_0 \cup l_2) \neq \emptyset$. Ensimmäisessä tapauksessa valitaan jokin piste $w_2 \in s_2 \cap U$. Jälkimmäisessä tapauksessa pisteeksi $w_2 \in s_2 \cap U$ voidaan valita sellainen piste, että se on lähempänä pistettä v_2 kuin kumpikaan leikkausjoukon pisteistä. Tällöin $[w_2, v_i] \cap J = \{v_i\}$, kun $i \in \{0,1\}$. Siten myös $v_0w_2v_1 \cap J = v_0v_1 = \sigma \cap J$.

Siirrytään tarkastelemaan tilannetta, jossa $\sigma \cap J = v_0v_2 \cup v_2v_1$ (Kuva 34). Voidaan olettaa, että $v_0v_2 \subset L_1$ ja $v_2v_1 \subset L_2$. Olkoon $K = \cup\{L_i : 4 \leq i \leq n-1\}$. Tällöin joukko K on jälleen joko tyhjä joukko tai murtoviiva. Valitaan joukko U kuten edellä riippuen siitä, onko K tyhjä vai ei. Joukko U on siis simpleksin σ ympäristö, joka ei kohtaa joukkoa



Kuva 34

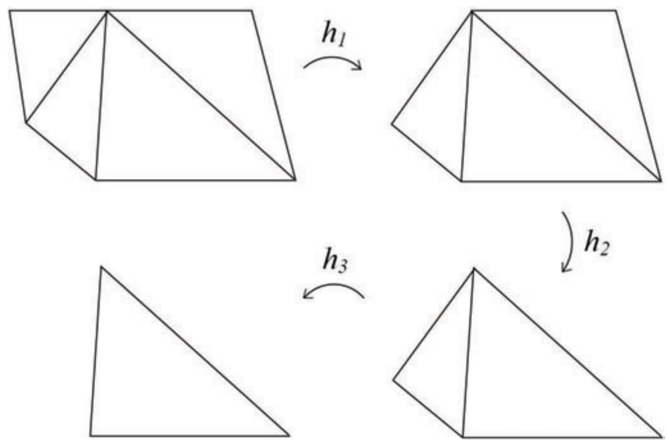
K. Olkoon w_0 särmän v_0v_1 keskipiste kuten edellä. Tarkastellaan pisteiden w_0 ja v_2 kautta kulkevaa suoraa s. Olkoon $s_1 \subset s$ se pisteestä w_0 alkava puolisuora, joka pisteen w_0 jokaisessa ympäristössä kohtaa joukon $X \setminus \sigma$. Olkoon vastaavasti $s_2 \subset s$ se pisteestä v_2 alkava puolisuora, joka pisteen v_2 jokaisessa ympäristössä kohtaa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{X}$. Olkoon l_0 janan L_0 määräämä suora. Jos jana L_3 on olemassa, olkoon l_3 sen määräämä suora.

Tarkastellaan puolisuoraa s_1. On kaksi mahdollisuutta: joko $s_1 \cap l_0 = \emptyset = s_1 \cap l_3$ tai $s_1 \cap (l_0 \cup l_3) \neq \emptyset$. Ensimmäisessä tapauksessa valitaan jokin piste $w_1 \in s_1 \cap U$. Jälkimmäisessä tapauksessa leikkausjoukkoon $s_1 \cap (l_0 \cup l_3)$ kuuluu enintään kaksi pistettä, joten pisteeksi $w_1 \in s_1 \cap U$ voidaan valita sellainen piste, että se on lähempänä pistettä w_0 kuin kumpikaan leikkausjoukon pisteistä. Tällöin $[w_1, v_i] \cap J = \{v_i\}$, kun $i \in \{0, 1\}$. Siten $v_0w_1v_1 \cap J = \{v_0, v_1\} \subset \sigma \cap J$.

Tarkastellaan puolisuoraa s_2. Jälleen joko $s_2 \cap l_0 = \emptyset = s_2 \cap l_3$ tai $s_2 \cap (l_0 \cup l_3) \neq \emptyset$. Ensimmäisessä tapauksessa valitaan jokin piste $w_2 \in s_2 \cap U$. Jälkimmäisessä tapauksessa pisteeksi $w_2 \in s_2 \cap U$ voidaan valita sellainen piste, että se on lähempänä pistettä v_2 kuin kumpikaan leikkausjoukon pisteistä. Tällöin $[w_2, v_i] \cap J = \{v_i\}$, kun $i \in \{0, 1\}$. Siten $v_0w_2v_1 \cap J = v_0v_2 \cup v_2v_1 = \sigma \cap J$. $\square$

Seuraavassa lauseessa siis osoitetaan, että on olemassa tason $\mathbb{R}^2$ homeomorfismi, joka kuvaa monikulmion määräämän monitahokkaan 2-simpleksiksi. Myöhemmin tämän tuloksen avulla todistetaan Schönfliesin lause monikulmioille (Lause 9.17).

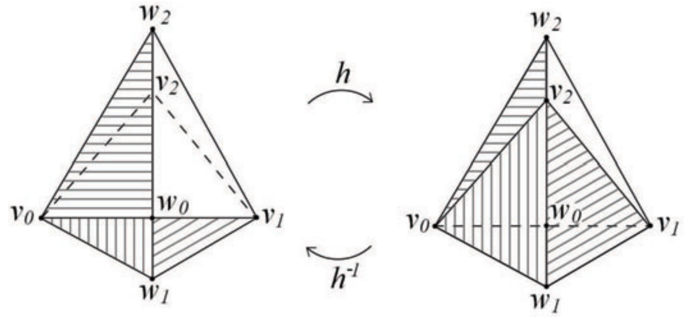
Lause 9.11. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja X sen sisäpuoli. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että fJ on jonkin 2-simpleksin σ reuna ja $f\bar{X} = \sigma$.*



KUVA 35

Todistus: Olkoon X monikulmion J sisäpuoli ja olkoon Δ monitahokkaan $\bar{X}$ kolmiointi. Jos kolmiointiin Δ kuuluu vain yksi 2-simpleksi, niin J on sen reuna, ja homeomorfismiksi f voidaan valita identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Oletetaan siis, että kolmiointiin Δ kuuluu ainakin kaksi 2-simpleksiä. Lauseen 9.9 mukaan siihen kuuluu tällöin vapaa 2-simpleksi $\sigma = v_0v_1v_2$. Osoitetaan, että on olemassa homeomorfismi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kuvaa monikulmion J sellaiseksi monikulmioksi J', että monitahokkaan $\bar{X}'$ kolmioinnissa on yksi simpleksi vähemmän kuin monitahokkaan $\bar{X}$ kolmioinnissa. (Tässä siis X' on monikulmion J' sisäpuoli.) Lauseen 9.7 mukaan kompleksi Δ on äärellinen, joten yhdistämällä tällaisia homeomorfismeja saadaan haluttu homeomorfismi f (Kuva 35).

Simpleksi $\sigma = v_0v_1v_2$ on siis vapaa kompleksissa Δ, joten leikkaus $\sigma \cap J$ koostuu yhdestä tai kahdesta simpleksin σ särmästä. Seuraavaksi tarkastellaan molemmat tapaukset. Oletetaan aluksi, että $\sigma \cap J = v_0v_1$. Lauseen 9.10 mukaan on olemassa sellaiset pisteet $w_0 \in v_0v_1$, w_1 ja w_2 kuten kuvassa 36, että $(v_0w_1v_1 \cup v_0w_2v_1) \cap J = \sigma \cap J$. Olkoon K pisteiden v_0, w_2, v_1 ja w_1 määräämä monikulmio ja olkoon W sen sisäpuoli.



KUVA 36

Määritellään kuvaus $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla se identtiseksi kuvaukseksi joukossa $\complement W$ ja asetetaan $h(w_0) = v_2$. Tällöin siis $h(v_i) = v_i$, kun $i \in \{0, 1\}$, ja $h(w_i) = w_i$, kun $i \in \{1, 2\}$. Lauseen 9.5 nojalla on olemassa nämä ehdot täyttävät homeomorfismit $v_0w_1w_0 \to v_0w_1v_2$, $w_1v_1w_0 \to w_1v_1v_2$, $w_0v_1w_2 \to v_2v_1w_2$ ja $v_0w_0w_2 \to v_0v_2w_2$ (Kuva 36). Näin kuvaus h tulee määritellyksi koko avaruudessa $\mathbb{R}^2$ niin, että se on homeomorfismi $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Lisäksi h kuvaa monikulmion J monikulmioksi J', jolla $X' = X \setminus \sigma$, ja $h\bar{X} = \bar{X}'$. Siis h on etsitty homeomorfismi.

Oletetaan sitten, että $\sigma \cap J = v_0v_2 \cup v_2v_1$. Lauseen 9.10 mukaan tässäkin tapauksessa on olemassa sellaiset pisteet $w_0 \in v_0v_1$, w_1 ja w_2 kuten kuvassa 36, että $(v_0w_1v_1 \cup v_0w_2v_1) \cap J = \sigma \cap J$. Etsitty homeomorfismi on nyt edellä määritellyn homeomorfismin h käänteiskuvaus h^{-1}. □

Lauseen 9.11 avulla voidaan osoittaa, että kaikki tason monikulmiot sijaitsevat tasossa topologisesti samalla tavalla:

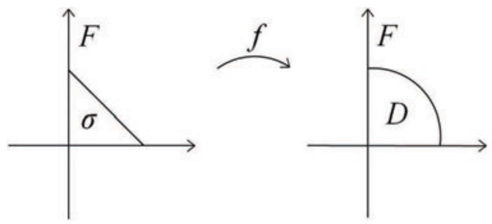
Lause 9.12. *Olkoot J ja J' monikulmioita avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $fJ = J'$.*

Todistus: Lauseen 9.11 mukaan on olemassa sellaiset homeomorfismit f_1 ja $f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $f_1J = \partial\sigma$ ja $f_2J' = \partial\tau$, missä σ ja τ ovat 2-simpleksejä. Lauseen 9.4 mukaan on olemassa sellainen homeomorfismi $f_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $f_3\sigma = \tau$. Siis erityisesti $f_3\partial\sigma = \partial f_3\sigma = \partial\tau$. Yhdistetty kuvaus $f = f_2^{-1} \circ f_3 \circ f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on homeomorfismi, ja $fJ = f_2^{-1}f_3f_1J = f_2^{-1}f_3\partial\sigma = f_2^{-1}\partial\tau = J'$. □

Tavoitteena on seuraavaksi osoittaa, että jos σ on tason 2-simpleksi ja $f\colon \partial\sigma \to \partial\sigma$ homeomorfismi, niin homeomorfismilla f on sellainen homeomorfinen jatke $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h\sigma = \sigma$ (Lause 9.16). Tätä tarvitaan, kun todistetaan Schönfliesin lause monikulmioille. Aloitetaan kuitenkin osoittamalla, että 2-simpleksi voidaan kuvata homeomorfisesti neljänneskiekoksi:

Lause 9.13. *Olkoon $\sigma = (0,0)(1,0)(0,1)$ simpleksi avaruudessa $\mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ neljännestaso ja $D = \bar{B}(\bar{0}, 1) \cap F$. On olemassa sellainen homeomorfismi $f\colon F \to F$, että $f\sigma = D$ ja $f|\{(x,y) \in F : xy = 0\} = \mathrm{id}$.*

Todistus: Määritellään kuvaukset f ja $g\colon F \to F$ asettamalla $f(x,y) = (x, \sqrt{y^2 + 2xy})$ ja $g(x,y) = (x, \sqrt{x^2 + y^2} - x)$. Nämä ovat jatkuvia, sillä niiden komponenttikuvaukset ovat jatkuvia. Lisäksi $f(g(x,y)) = f(x, \sqrt{x^2 + y^2} - x) = (x,y)$ ja $g(f(x,y)) = g(x, \sqrt{y^2 + 2xy}) = (x,y)$ kaikilla $(x,y) \in F$. Siis $g = f^{-1}$, joten f on homeomorfismi. Kuvauksen f lausekkeesta nähdään, että $f|\{(x,y) \in F : xy = 0\} = \mathrm{id}$. Osoitetaan vielä, että $f\sigma = D$:



KUVA 37

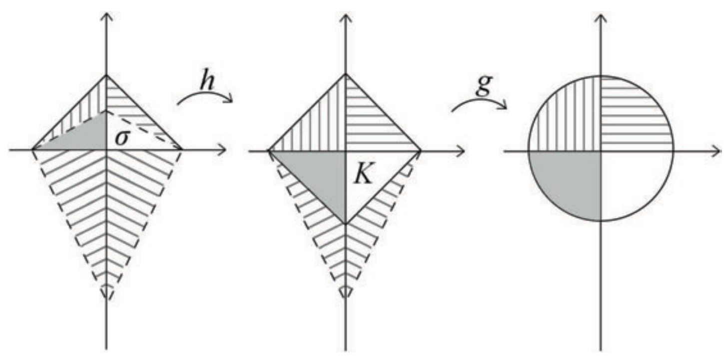
Olkoon $(x, y) \in \sigma$. Tällöin $y = -x + b$, missä $b \in [0, 1]$. Siis $x + y \in [0, 1]$. Pisteen $f(x, y)$ etäisyys origosta $|f(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = x + y \in [0, 1]$, joten $f(x, y) \in \bar{B}(\bar{0}, 1)$. Lisäksi $pr_1(f(x, y)) = x \geq 0$ ja $pr_2(f(x, y)) = \sqrt{y^2 + 2xy} \geq 0$, joten $f(x, y) \in D$.

Jos taas $(x, y) \in F \setminus \sigma$, niin $x + y > 1$. Tällöin $|f(x, y)| = x + y > 1$, joten $f(x, y) \notin \bar{B}(\bar{0}, 1)$. Siis $(x, y) \in F \setminus D$. □

Lauseen 9.13 avulla voidaan osoittaa, että on olemassa tason $\mathbb{R}^2$ homeomorfismi, joka kuvaa 2-simpleksin suljetuksi yksikkökiekoksi $\bar{B}^2 = \bar{B}(\bar{0}, 1)$:

Lause 9.14. *Olkoon* $\sigma = (-1, 0)(1, 0)(0, 1)$ *2-simpleksi avaruudessa* $\mathbb{R}^2$*. On olemassa sellainen homeomorfismi* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, että* $f\sigma = \bar{B}^2$*.*

Todistus: Olkoon K pisteiden $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ määräämä monitahokas, kuten kuvassa 38. Lauseen 9.11 mukaan on olemassa tason homeomorfismi, joka kuvaa monitahokkaan K joksikin 2-simpleksiksi. Toisaalta Lauseen 9.4 mukaan on olemassa tason homeomorfismi, joka kuvaa tämän 2-simpleksin 2-simpleksiksi σ. Näin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h\sigma = K$.



KUVA 38

Olkoon $\tau_1 = (0, 0)(1, 0)(0, 1)$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ neljännestaso ja $D = \bar{B}(\bar{0}, 1) \cap F$. Lauseen 9.13 mukaan on olemassa sellainen homeomorfismi $g_1\colon F \to F$, että $g_1\sigma = D$ ja $g_1|\{(x, y) \in F : xy = 0\} = \text{id}$. Voidaan osoittaa kuten Lauseessa 9.13, että tason muissakin neljänneksissä voidaan määritellä vastaavat homeomorfismit. Näin saadaan paloittain määriteltyä kuvaus $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka on myös homeomorfismi ja jolla $gK = \bar{B}^2$. Yhdistetty kuvaus $f = g \circ h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on näin homeomorfismi ja $f\sigma = gh\sigma = gK = \bar{B}^2$. $\square$

Seuraavaksi osoitetaan, että jokainen homeomorfismi $f\colon S^1 \to S^1$ voidaan jatkaa sellaiseksi homeomorfismiksi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h\bar{B}^2 = \bar{B}^2$. Tämän avulla todistetaan vastaava tulos 2-simplekseille Lauseessa 9.16.

Lause 9.15. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ homeomorfismi. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h\bar{B}^2 = \bar{B}^2$ ja $h|S^1 = f$.*

Todistus: Määritellään kuvaukset h ja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$h(x) = \begin{cases} |x| f\big(\frac{x}{|x|}\big), & x \neq \bar{0} \\ \bar{0}, & x = \bar{0}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x| f^{-1}\big(\frac{x}{|x|}\big), & x \neq \bar{0} \\ \bar{0}, & x = \bar{0}. \end{cases}$$

Kuvaukset h ja g ovat jatkuvia pisteissä $x \neq \bar{0}$. Osoitetaan, että kuvaus h on jatkuva myös origossa: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon$. Oletetaan, että $|x| < \varepsilon$, jolloin $|h(x)| = |x||f\big(\frac{x}{|x|}\big)| = |x| \cdot 1 < \varepsilon$. Siis kuvaus h on jatkuva pisteessä $\bar{0}$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että kuvaus g on jatkuva origossa. Lisäksi kun $x \neq \bar{0}$, niin $h(g(x)) = h(|x|f^{-1}\big(\frac{x}{|x|}\big)) = |x|ff^{-1}\big(\frac{x}{|x|}\big) = x$ ja $g(h(x)) = g(|x|f\big(\frac{x}{|x|}\big)) = x$. Myös $g(h(\bar{0})) = \bar{0} = h(g(\bar{0}))$, joten $g = h^{-1}$. Siis kuvaus h on homeomorfismi.

Jos $x \in S^1$, niin tällöin $h(x) = |x|f\big(\frac{x}{|x|}\big) = f(x)$. Siis $h|S^1 = f$. Jos $x \in \bar{B}^2$, niin $|h(x)| = |x| \leq 1$, joten $h(x) \in \bar{B}^2$. Jos $x \notin \bar{B}^2$, niin $|h(x)| = |x| > 1$, joten $h(x) \notin \bar{B}^2$. Siis $h\bar{B}^2 = \bar{B}^2$. $\square$

Lause 9.16. *Olkoon σ 2-simpleksi avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja olkoon $f\colon \partial\sigma \to \partial\sigma$ homeomorfismi. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h\sigma = \sigma$ ja $h|\partial\sigma = f$.*

Todistus: Lauseen 9.14 mukaan on olemassa sellainen homeomorfismi $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $g\sigma = \bar{B}^2$. Erityisesti $g\partial\sigma = \partial g\sigma = S^1$, joten voidaan määritellä yhdistetty kuvaus $g \circ f \circ g^{-1}\colon S^1 \to S^1$. Tämä kuvaus on myös homeomorfismi, joten Lauseen 9.15 nojalla on olemassa sellainen homeomorfismi $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $k|S^1 = g \circ f \circ g^{-1}$ ja $k\bar{B}^2 = \bar{B}^2$. Olkoon $h = g^{-1} \circ k \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Kuvaus h on homeomorfismi ja $h\sigma = g^{-1}kg\sigma = g^{-1}k\bar{B}^2 = g^{-1}\bar{B}^2 = \sigma$. Lisäksi jos $x \in \partial\sigma$, niin $g(x) \in S^1$. Näin $h|\partial\sigma = g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} \circ g = f$. $\square$

Nyt voidaan todistaa Schönfliesin lause tason monikulmioille. Sen mukaan jokainen kahden monikulmion J ja J' välinen homeomorfismi $f\colon J \to J'$ voidaan jatkaa koko tason homeomorfismiksi:

Lause 9.17 (Schönfliesin lause monikulmioille)**.** *Olkoot J ja J' monikulmioita avaruudessa $\mathbb{R}^2$ ja olkoon $f\colon J \to J'$ homeomorfismi. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h|J = f$.*

Todistus: Lauseen 9.11 nojalla on olemassa sellaiset homeomorfismit g_1 ja $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $g_1 J = \partial\sigma$ ja $g_2 J' = \partial\tau$, missä σ ja τ ovat 2-simpleksejä. Lauseen 9.4 nojalla on olemassa sellainen homeomorfismi $g_3\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $g_3\tau = \sigma$. Näin voidaan muodostaa yhdistetty kuvaus $g_3 \circ g_2 \circ f \circ g_1^{-1}\colon \partial\sigma \to \partial\sigma$, joka on myös homeomorfismi. Lauseen 9.16 nojalla on olemassa sellainen homeomorfismi $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $k|\partial\sigma = g_3 \circ g_2 \circ f \circ g_1^{-1}$. Olkoon $h = g_2^{-1} \circ g_3^{-1} \circ k \circ g_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Kuvaus h on homeomorfismi, ja jos $x \in J$, niin $g_1(x) \in \partial\sigma$, joten $h|J = f$. □

10. Schönfliesin lause

Tässä luvussa todistetaan Schönfliesin lause, jonka mukaan jokainen upotus $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ voidaan jatkaa homeomorfismiksi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Aloitetaan määrittelemällä seuraava uusi käsite:

Määritelmä 10.1. Olkoon X topologinen avaruus, joka on homeomorfinen n-simpleksin kanssa. Tällöin sanotaan, että avaruus X on *n-solu.*

Lauseen 9.14 nojalla suljettu yksikkökiekko $\bar{B}^2$ on 2-solu. Seuraavan lauseen avulla on helppo saada muita esimerkkejä 2-soluista, sillä sen mukaan jokainen tason monikulmion määräämä monitahokas on 2-solu.

Lause 10.2. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ monikulmio ja X sen sisäpuoli. Tällöin monitahokas $\bar{X}$ on 2-solu.*

Todistus: Lauseen 9.11 mukaan on olemassa homeomorfismi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kuvaa monitahokkaan $\bar{X}$ 2-simpleksiksi σ. Homeomorfismin f rajoittuman $f|\bar{X}$ määrittelemä kuvaus $\bar{X} \to \sigma$ on Lemman 2.5 nojalla homeomorfismi. □

Jatkossa tarkastellaan ainoastaan 2-soluja avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Asetetaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 10.3. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ 2-solun C *reuna* $\partial C = f\partial\sigma$, missä $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ on jokin 2-simpleksi ja $f\colon \sigma \to C$ on homeomorfismi.

Olkoon $C \subset \mathbb{R}^2$ 2-solu ja olkoon $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ 2-simpleksi. Osoitetaan seuraavaksi, että edellä asetettu määritelmä on järkevä, eli joukko $f\partial\sigma$ ei riipu homeomorfismin $f\colon \sigma \to C$ valinnasta. Tässä nojaudutaan Alueen invarianssilauseeseen, joka on ilman todistusta mainittu kirjassa [7], Lause 14.3. Sen todistus löytyy kirjasta [4].

Lause 10.4 (Alueen invarianssilause)**.** *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja olkoon $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ jatkuva injektio. Tällöin kuvajoukko fU on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja kuvaus f on upotus.*

Merkitään joukkojen σ ja C sisäpisteitä avaruudessa $\mathbb{R}^2$ seuraavassa $\mathrm{int}\sigma$ ja $\mathrm{int}C$. Olkoon $f\colon \sigma \to C \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfismi. Sen rajoittuma avoimeen joukkoon $\mathrm{int}\sigma$ on jatkuva injektio, joten Alueen invarianssilauseen mukaan myös kuvajoukko $f[\mathrm{int}\sigma]$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Näin $f[\mathrm{int}\sigma] \subset \mathrm{int}C$, sillä $\mathrm{int}C$ on tason laajin avoin osajoukko, joka sisältyy joukkoon C. Vastaavasti käänteiskuvauksen $f^{-1}\colon C \to \sigma$ rajoittuma avoimeen joukkoon $\mathrm{int}C$ on myös jatkuva injektio, joten Alueen invarianssilauseen mukaan kuvajoukko $f^{-1}[\mathrm{int}C]$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Näin $f^{-1}[\mathrm{int}C] \subset \mathrm{int}\sigma$. Siis $\mathrm{int}C = ff^{-1}[\mathrm{int}C] \subset f[\mathrm{int}\sigma] \subset \mathrm{int}C$. Näin saatiin osoitettua, että $f[\mathrm{int}\sigma] = \mathrm{int}C$. Simpleksi σ on suljettu, joten $\partial\sigma = \sigma \setminus \mathrm{int}\sigma$. Näin $f\partial\sigma = f[\sigma \setminus \mathrm{int}\sigma] = f\sigma \setminus f[\mathrm{int}\sigma] = C \setminus \mathrm{int}C$, sillä f on bijektio. Siis joukko $f\partial\sigma = C \setminus \mathrm{int}C$ jokaisella homeomorfismilla $f\colon \sigma \to C$.

Lauseessa 10.5 osoitetaan Lauseen 9.16 avulla, että jokainen 2-solujen reunojen välinen homeomorfismi voidaan jatkaa näiden 2-solujen väliseksi homeomorfismiksi. Myöhemmin tavoitteena on osoittaa, että avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetun komponentin sulkeuma on 2-solu, kun $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä. Tämä tehdään Lauseessa 10.14.

Lause 10.5. *Olkoot C_1, $C_2 \subset \mathbb{R}^2$ 2-soluja. Olkoon $f\colon \partial C_1 \to \partial C_2$ homeomorfismi. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon C_1 \to C_2$, että $h|\partial C_1 = f$.*

Todistus: Olkoon σ avaruuden $\mathbb{R}^2$ 2-simpleksi. Jokainen 2-solu on määritelmän mukaan homeomorfinen 2-simpleksin kanssa, ja Lauseen 9.5 nojalla kaikki avaruuden $\mathbb{R}^2$ 2-simpleksit ovat homeomorfisia keskenään. Näin on olemassa homeomorfismit $g_1\colon \sigma \to C_1$ ja $g_2\colon \sigma \to C_2$. Erityisesti $g_i\partial\sigma = \partial C_i$, kun $i \in \{1, 2\}$, joten voidaan määritellä yhdistetty kuvaus $g_2^{-1} \circ f \circ g_1\colon \partial\sigma \to \partial\sigma$. Tämä kuvaus on homeomorfismi.

Lauseen 9.16 nojalla on olemassa sellainen homeomorfismi $k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $k\sigma = \sigma$ ja $k|\partial\sigma = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$. Homeomorfismin k rajoittuman $k|\sigma$ määrittelemä kuvaus $k_1\colon \sigma \to \sigma$ on Lemman 2.5 nojalla homeomorfismi. Edelleen $k_1|\partial\sigma = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$. Olkoon $h = g_2 \circ k_1 \circ g_1^{-1}\colon C_1 \to C_2$. Kuvaus h on homeomorfismi. Lisäksi jos $x \in \partial C_1$, niin $g_1^{-1}(x) \in \partial\sigma$, joten $h|\partial C_1 = g_2 \circ g_2^{-1} \circ f \circ g_1 \circ g_1^{-1} = f$. □

Jatkossa tarkastellaan erityisesti niitä Jordanin käyrän $J \subset \mathbb{R}^2$ pisteitä x, jotka voidaan yhdistää joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentin X johonkin pisteeseen sellaisella janalla, joka pistettä x lukuunottamatta sisältyy komponenttiin X. Asetetaan seuraava määritelmä:

Määritelmä 10.6. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja olkoon $x \in \partial U$. Oletetaan, että on olemassa sellainen jana $[u, x]$, että $[u, x[\subset U$. Tällöin sanotaan, että piste x on *lineaarisesti saavutettavissa joukosta U*.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen Jordanin käyrä $J \subset \mathbb{R}^2$ sisältää pisteitä, jotka ovat lineaarisesti saavutettavissa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$

komponentista. Todistuksessa tarkastellaan kaarta $A \subset J$, ja joukon A sisäpisteitä avaruudessa J merkitään tässä sekä jatkossa $\mathrm{int}A$.

Lause 10.7. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentti. Olkoon $A \subset J$ kaari. Tällöin on olemassa sellainen jana $[v, a]$, että $a \in \mathrm{int}A$ ja $[v, a[\subset X$.*

Todistus: Olkoon $a' \in \mathrm{int}A$. Joukko $\mathrm{int}A$ on avoin joukossa J, joten voidaan valita sellainen $\varepsilon > 0$, että $B(a', \varepsilon) \cap J \subset \mathrm{int}A$. Piste a' on joukon X reunapiste, joten sen jokainen ympäristö kohtaa joukon X. Näin on olemassa piste $v \in X \cap B(a', \varepsilon)$. Leikkaus $[v, a'] \cap J$ on kompakti, joten on olemassa piste $a \in [v, a'] \cap J$, joka on lähinnä pistettä v. Tällöin $[v, a[\subset X$. Lisäksi $[v, a'] \subset B(a', \varepsilon)$, joten $[v, a'] \cap J \subset B(a', \varepsilon) \cap J \subset \mathrm{int}A$. Näin $a \in \mathrm{int}A$. □

Suhteellisen helposti voidaan myös osoittaa, että Jordanin käyrän J jokaisen pisteen jokaisessa ympäristössä on ainakin yksi piste, joka on lineaarisesti saavutettavissa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentista:

Lause 10.8. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentti. Olkoon $E \subset J$ niiden pisteiden joukko, jotka ovat lineaarisesti saavutettavissa joukosta X. Tällöin $J = \bar{E}$.*

Todistus: Jordanin käyrä J on suljettu ja $E \subset J$, joten väitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $J \subset \bar{E}$. Olkoon $x \in J$. Osoitetaan, että välttämättä $x \in \partial E$, mikä todistaa väitteen. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $A \subset J \cap B(x, \varepsilon)$ kaari, joka sisältää pisteen x. Tällöin Lauseen 10.7 mukaan on olemassa sellainen jana $[a, v]$, että $a \in \mathrm{int}A$ ja $[v, a[\subset X$. Piste $a \in J$ on siis lineaarisesti saavutettavissa joukosta X ja kuuluu siten joukkoon E. Lisäksi $a \in \mathrm{int}A \subset B(x, \varepsilon)$. Luku ε saattoi olla mikä tahansa positiivinen luku, joten pisteen x jokainen kuulaympäristö sisältää joukon E pisteen. Näin $x \in \partial E$. □

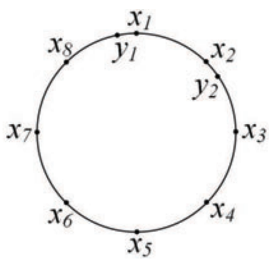
Lauseen 10.8 tuloksen nojalla voidaan Jordanin käyrä $J \subset \mathbb{R}^2$ jakaa miten tahansa lyhyiksi kaariksi, joiden päätepisteet ovat lineaarisesti saavutettavissa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetusta komponentista. Seuraavassa lauseessa muodostetaan jono tämän tyyppisten kaarien kokoelmia.

Lause 10.9. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Tällöin on olemassa sellainen jono joukkoja $G_1, G_2, \dots$, että*

(1) *jokainen G_i on äärellinen kokoelma kaaria $\gamma \subset J$, jotka leikkaavat vain päätepisteissään ja joiden yhdiste on koko Jordanin käyrä J,*
(2) *jos $\gamma \in G_i$, niin kaaren γ päätepisteet ovat lineaarisesti saavutettavissa joukosta X,*
(3) *jos $x \in \gamma \in G_i$, niin $\gamma \subset B(x, 1/i)$ ja*
(4) *jokaisella indeksillä i joukko G_{i+1} on joukon G_i hienonnus eli jokainen joukon G_{i+1} kaari sisältyy joukon G_i johonkin kaareen.*

Todistus: Joukko J on Jordanin käyrä, joten on olemassa homeomorfismi $f\colon S^1 \to J$. Olkoon $E \subset J$ niiden pisteiden joukko, jotka ovat lineaarisesti saavutettavissa joukosta X. Lauseen 10.8 mukaan $J = \bar{E}$. Kuvaus f on homeomorfismi, joten sillä on käänteiskuvaus f^{-1} ja $\overline{f^{-1}E} = f^{-1}\bar{E} = f^{-1}J = S^1$. Näin jokaisen pisteen $x \in S^1$ jokainen ympäristö sisältää joukon $f^{-1}E$ pisteen.

Osoitetaan, että jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa ympyrän S^1 jako äärellisen moneksi kaareksi γ', joiden läpimitta on alle ε ja jotka leikkaavat toisiaan vain päätepisteissään, jotka kuuluvat joukkoon $f^{-1}E$: Olkoon $\varepsilon > 0$. Voidaan olettaa, että $\varepsilon < 3$. Jaetaan ympyrä S^1 äärellisen moneksi kaareksi, joiden jokaisen läpimitta on enintään $\varepsilon/3 < 1$. Olkoot näiden kaarien päätepisteet x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ (Kuva 39). Edellä tode-



Kuva 39

tun perusteella jokainen kuula $B(x_i, \varepsilon/6)$ sisältää joukon $f^{-1}E$ pisteen y_i ($i \in \{1, \dots, n\}$). Pisteiden y_i ja y_{i+1} etäisyys on tällöin $|y_i - y_{i+1}| \leq |y_i - x_i| + |x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - y_{i+1}| < \varepsilon/6 + \varepsilon/3 + \varepsilon/6 = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Luku ε oletettiin niin pieneksi, että etäisyys $|y_i - y_{i+1}|$ on myös pisteiden y_i ja y_{i+1} määräämän, pisteet x_i ja x_{i+1} sisältävän kaaren γ' läpimitta.

Todistetaan nyt joukkojen G_i olemassaolo induktiolla indeksin i suhteen: Valitaan jaon G_1 kaariksi kuvajoukot $\gamma = f\gamma'$. Kuvaus f on homeomorfismi, joten nämä kaaret leikkaavat toisiaan vain päätepisteissään, jotka kuuluvat joukkoon E. Lisäksi näiden kaarien yhdiste on koko Jordanin käyrä J, joten jako G_1 toteuttaa ehdot (1) ja (2).

Ympyrä S^1 on kompakti, joten homeomorfismi f on tasaisesti jatkuva joukossa S^1. Näin voidaan kaarien γ' läpimittoihin liittyvä luku $\varepsilon > 0$ valita niin pieneksi, että jokaisen kaaren $\gamma = f\gamma'$ läpimitta on alle 1. Tällöin jos $x \in \gamma \in G_1$, niin $d(x, y) < 1$ kaikilla $y \in \gamma$, joten $\gamma \subset B(x, 1)$. Siis myös ehto (3) on voimassa. Tehdään induktio-oletus, että on olemassa ehdot $(1) - (3)$ toteuttava jako G_i ja osoitetaan, että tällöin on olemassa ehdot $(1) - (4)$ toteuttava jako G_{i+1}:

Menetellen kuten jaon G_1 tapauksessa voidaan muodostaa Jordanin käyrän J jako äärellisen moneksi kaareksi, jotka toteuttavat ehdot (1) ja (2). Edelleen voidaan kaarien γ' läpimittoihin liittyvä luku $\varepsilon > 0$ valita niin pieneksi, että jokaisen kaaren $\gamma = f\gamma'$ läpimitta on alle $1/(i+1)$, jolloin myös ehto (3) täyttyy. Jaetaan tämän jaon kaaret vielä jaon

G_i päätepisteiden mukaan kaariksi. Tällöin saadaan jako G_{i+1}, jonka jokainen kaari sisältyy jaon G_i johonkin kaareen. Jako G_{i+1} on siis jaon G_i hienonnus ja toteuttaa edelleen ehdot (1) - (3). □

Jokaisen edellä muodostetun jaon G_i, $i \in \mathbb{N}$, kaarien päätepisteet ovat siis lineaarisesti saavutettavissa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetusta komponentista X. Seuraavassa lauseessa voidaan näin muodostaa jokaista jakoa G_i vastaava janojen kokoelma H_i. Sekä kokoelmia G_i että kokoelmia H_i tarvitaan myöhemmin Lauseen 10.14 todistuksessa.

Lause 10.10. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Olkoot G_1, G_2, ... kuten lauseessa 10.9. Tällöin on olemassa sellainen jono H_1, H_2, ... janojen $[v, x]$ kokoelmia, että*

(1) *jos $[v, x] \in H_i$, niin $[v, x[\subset X$ ja piste $x \in J$ on jonkin kaaren $\gamma \in G_i$ päätepiste,*
(2) *jokaisen kaaren $\gamma \in G_i$ kumpikin päätepiste kuuluu yhteen ja vain yhteen janaan $[v, x] \in H_i$,*
(3) *kokoelman H_i janat ovat erillisiä jokaisella $i \in \mathbb{N}$,*
(4) *jos $[v, x] \in H_i$ ja $[u, y] \in H_j$ $(i < j)$ ja lisäksi $[v, x] \cap [u, y] \neq \emptyset$, niin $[u, y] = [v, x]$.*

Todistus: Osoitetaan joukkojen H_i olemassaolo induktiolla indeksin $i \in \mathbb{N}$ suhteen. Lauseen 10.9 mukaan jaon G_1 kaarien päätepisteet ovat lineaarisesti saavutettavissa joukosta X. Näin voidaan muodostaa jaon G_1 kaarien päätepisteitä $x \in J$ vastaavat janat $[v, x]$, joilla $[v, x[\subset X$. Jaon G_1 kaarien päätepisteitä on äärellisen monta, joten niillä on erilliset kuulaympäristöt. Tarvitaessa voidaan janoja $[v, x]$ lyhentää niin paljon, että ne sisältyvät näihin kuulaympäristöihin. Olkoon näiden mahdollisesti lyhennettyjen janojen kokoelma H_1. Se toteuttaa ehdot $(1) - (3)$.

Tehdään induktio-oletus, että on olemassa janojen kokoelma H_i, joka toteuttaa ehdot $(1) - (3)$. Olkoon P_i jaon G_i kaarien päätepisteiden joukko jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Lauseen 10.9 mukaan joukot G_i on muodostettu niin, että $P_i \subset P_{i+1}$. Muodostetaan joukko H_{i+1} sisällyttämällä siihen aluksi kaikki joukon H_i janat. Nämä vastaavat joukon P_i pisteitä. Lauseen 10.9 mukaan joukon P_{i+1} pisteet ovat lineaarisesti saavutettavissa joukosta X. Näin voidaan muodostaa joukon $P_{i+1} \setminus P_i$ pisteitä vastaavat janat $[v, x]$, joilla $[v, x[\subset X$.

Joukossa $P_{i+1} \setminus P_i$ on äärellinen määrä pisteitä, joten niillä on erilliset ympäristöt. Joukko $\cup H_i$ on suljettu eikä sisällä yhtään joukon $P_{i+1} \setminus P_i$ pistettä, joten kyseiset ympäristöt voidaan valita niin pieniksi, etteivät ne kohtaa joukkoa $\cup H_i$. Lyhennetään joukon $P_{i+1} \setminus P_i$ pisteitä vastaavia janoja tarvittaessa niin, että ne sisältyvät näihin erillisiin ympäristöihin. Lisätään nämä mahdollisesti lyhennetyt janat joukkoon H_{i+1}. Näin muodostettu joukko H_{i+1} toteuttaa ehdot $(1) - (3)$ ja lisäksi $H_i \subset H_{i+1}$. Induktioperiaatteen nojalla on siis olemassa sellainen jono H_1, H_2, ...

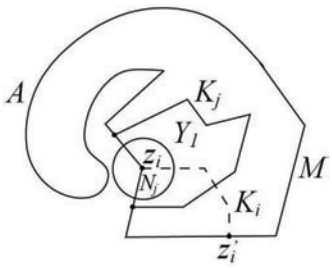
janojen $[v,x]$ kokoelmia, että ehdot (1) − (3) toteutuvat. Osoitetaan vielä, että nämä kokoelmat toteuttavat myös ehdon (4):

Olkoot $i,j \in \mathbb{N}$. Voidaan olettaa, että $i < j$. Oletetaan, että $[v,x] \in H_i$ ja $[u,y] \in H_j$. Koska $H_i \subset H_{i+1}$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$, niin erityisesti $H_i \subset H_j$ ja $[v,x] \in H_j$. Joukon H_j välit ovat erillisiä, joten jos $[v,x] \cap [u,y] \neq \emptyset$, niin välttämättä $[v,x] = [u,y]$. □

Lemmassa 10.11 ja Lauseessa 10.12 tarkastellaan Jordanin käyrää $J \subset \mathbb{R}^2$, joka muodostuu kaaresta A ja murtoviivasta M. Joukkojen A ja M sisäpisteitä avaruudessa J merkitään $\text{int}A$ ja $\text{int}M$. Joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ komponentteja merkitään X_0 ja X_1. Näistä X_1 on rajoitettu. Samoja merkintöjä käytetään Lauseessa 10.12.

Lemma 10.11. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä, joka muodostuu kaaresta A ja murtoviivasta M. Olkoot $K_1, \dots, K_n \subset \bar{X}_1$ erillisiä murtoviivoja, jotka sisältyvät päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X_1. Oletetaan, että jokaisen murtoviivan K_i päätepisteet z_i, $z_i' \in \text{int}M$. Olkoon $j \in \{1, \dots, n\}$. Olkoon $N_j \subset M$ murtoviivan K_j päätepisteet z_j ja z_j' yhdistävä murtoviiva. Oletetaan, että murtoviiva N_j sisältää jonkin murtoviivan K_i toisen päätepisteen. Tällöin se sisältää kyseisen murtoviivan molemmat päätepisteet.*

Todistus: Oletetaan, että murtoviiva N_j sisältää jonkin murtoviivan K_i toisen päätepisteen, $i \neq j$. Tehdään vastaoletus, että murtoviivan K_i toinen päätepiste ei sisälly murtoviivaan N_j (Kuva 40). Olkoot murto-



Kuva 40

viivan K_i päätepisteet z_i ja z_i'. Voidaan olettaa, että $z_i \in N_j$. Olkoon $J' = N_j \cup K_j$. Tällöin joukko J' on monikulmio ja $z_i \in J'$. Jordanin käyrälauseen mukaan avaruudella $\mathbb{R}^2 \setminus J'$ on kaksi komponenttia, joista toinen on rajoitettu ja toinen rajoittamaton, ja monikulmio J' on niiden molempien reuna. Olkoot nämä komponentit Y_0 ja Y_1, joista Y_1 on rajoitettu. Rajoitettu komponentti $Y_1 \subset X_1$, sillä $J' \subset \bar{X}_1$. Piste $z_i' \in J \setminus N_j$ ei sisälly monikulmioon J' eikä komponenttiin $Y_1 \subset X_1$, joten $z_i' \in Y_0$.

Pyritään seuraavaksi osoittamaan, että murtoviiva K_i kohtaa komponentin Y_1 ennen toista päätepistettään z_i. Merkitään $\text{int}N_j = N_j \setminus$

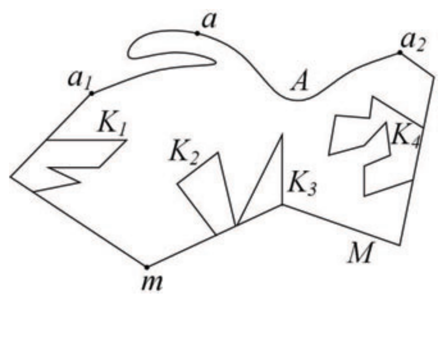
$\{z_j, z_j'\}$. Murtoviiva K_j ja K_i ovat erillisiä, joten piste $z_i \in \text{int}N_j$. Joukko N_j on murtoviiva, ja pisteen $z_i \in \text{int}N_j$ etäisyys kompakteista joukoista K_j ja $J \setminus \text{int}N_j$ on positiivinen. Näin on olemassa sellainen pisteen z_i ympäristö $B(z_i, \varepsilon)$, että joukko $B(z_i, \varepsilon) \setminus (J' \cup J)$ koostuu kahdesta ympyräsektorista (Kuva 40). Piste $z_i \in J \cap J'$ on komponenttien X_0 ja X_1 reunapiste, joten toinen näistä sektoreista sisältyy komponenttiin X_0 ja toinen komponenttiin X_1. Piste $z_i \in J \cap J'$ on myös komponenttien Y_0 ja Y_1 reunapiste, joten toinen näistä sektoreista sisältyy komponenttiin Y_0 ja toinen komponenttiin Y_1. Tiedetään, että $Y_1 \subset X_1$. Murtoviiva K_i sisältyy päätepisteitään z_i ja z_i' lukuunottamatta joukkoon X_1, joten sen on näin pakko kohdata myös joukko Y_1.

Murtoviiva K_i on yhtenäinen joukko, joka siis kohtaa komponentin Y_0 pisteessä z_i' ja komponentin Y_1 ennen toista päätepistettään z_i. Näin sen täytyy kohdata reuna $\partial Y_0 = J'$ jossain pisteessä $x \in K_i \setminus \{z_i, z_i'\}$. Murtoviiva K_i kohtaa Jordanin käyrän J ainoastaan päätepisteissään, joten $x \in J' \setminus J = (N_j \cup K_j) \setminus J = K_j \setminus \{z_j, z_j'\}$. Siis $x \in K_i \cap K_j$. Tämä on ristiriita, sillä murtoviivat K_j ja K_i oletettiin erillisiksi. Vastaoletus on siis väärä, ja murtoviiva N_j sisältää murtoviivan K_i molemmat päätepisteet. □

Seuraavaa lausetta käytetään todistettaessa Lause 10.13.

Lause 10.12. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä, joka muodostuu kaaresta A ja murtoviivasta M. Olkoot niiden yhteiset päätepisteet a_1 ja a_2. Olkoot $a \in \text{int}A$ ja $m \in \text{int}M$. Olkoot $K_1, \ldots, K_n \subset \bar{X}_1$ murtoviivoja, jotka sisältyvät päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X_1 eivätkä kohtaa toisiaan joukossa X_1. Oletetaan, että jokaisen murtoviivan K_i päätepisteet z_i, $z_i' \in \text{int}M \setminus \{m\}$. Olkoon $K = \cup_{i=1}^n K_i$. Oletetaan, että pisteet a ja m kuuluvat joukon $\bar{X}_1 \setminus K$ eri komponentteihin. Tällöin ne kuuluvat joukon $J \setminus \{z_i, z_i'\}$ eri komponentteihin jollain $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

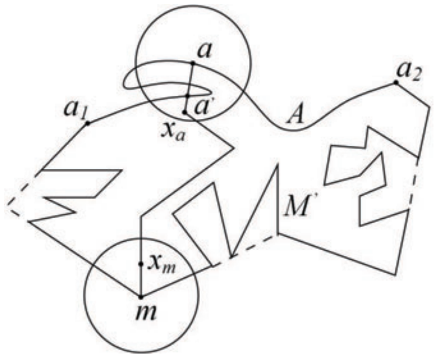
Todistus: Tehdään vastaoletus, että pisteet a ja m kuuluvat joukon $J \setminus \{z_i, z_i'\}$ samaan komponenttiin kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tällöin jokaisen murtoviivan K_i päätepisteet ovat molemmat pisteiden a_1 ja m välissä tai pisteiden m ja a_2 välissä (Kuva 41). Olkoon $M_i \subset M$ pisteet m ja a_i yhdistävä murtoviiva, $i \in \{1, 2\}$. Lemman 10.11 nojalla



KUVA 41

voidaan muodostaa uusi Jordanin käyrä $J' \subset \bar{X}$ seuraavasti: Olkoon $z_1 \in K \cap M_1$ pisteestä m lukien ensimmäinen piste, joka on jonkin murtoviivan K_i päätepiste. Voidaan olettaa, että pisteestä z_1 alkava murtoviiva on K_1, sillä murtoviivat voidaan tarvittaessa nimetä uudelleen. Jos pisteestä z_1 alkaa useampi kuin yksi murtoviiva K_i, valitaan murtoviivaksi K_1 se murtoviiva, jonka toisen päätepisteen z_1' etäisyys pisteestä z_1 on suurin. Korvataan pisteet z_1 ja z_1' yhdistävä murtoviivan M_1 osa murtoviivalla K_1. Olkoon $z_2 \in K \cap M_1$ pisteestä z_1' lukien ensimmäinen piste, joka on jonkin murtoviivan K_i päätepiste, $i \in \{2, \ldots, n\}$. Mahdollisesti $z_2 = z_1'$, jos kahdella eri murtoviivalla on yhteinen päätepiste. Voidaan olettaa kuten edellä, että pisteestä z_2 alkava murtoviiva on K_2. Samoin jos pisteestä z_2 alkaa useampi kuin yksi murtoviiva K_i, valitaan murtoviivaksi K_2 se murtoviiva, jonka toisen päätepisteen z_2' etäisyys pisteestä z_2 on suurin. Korvataan pisteet z_2 ja z_2' yhdistävä murtoviivan M_1 osa murtoviivalla K_2. Jatketaan näin kunnes saavutetaan sellainen piste $z_j' \in K \cap M_1$, että murtoviiva M_1 ei pisteiden z_j' ja a_1 välillä kohtaa joukkoa K. Vastaavasti voidaan menetellä murtoviivan M_2 kohdalla. Näin saadaan Jordanin käyrä $J' \subset \bar{X}_1$, joka muodostuu kaaresta A ja murtoviivasta M' (Kuva 42). Olkoon X' joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J'$ rajoitettu komponentti. Jordanin käyrä J' muodostettiin niin, että $K \cap X' = \emptyset$.

Piste $m \in \text{int}M$ ei vastaoletuksen mukaan sisälly mihinkään pisteet z_j ja z_j' yhdistävään murtoviivan M osaan, joten $m \in J'$. Samoin $a \in J'$. Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa joukon $\bar{X}'$ murtoviiva, joka yhdistää pisteen $m \in J'$ pisteeseen $a' \in \text{int}A$ ja sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon X_1. Joukko M' on murtoviiva, joten on olemassa sellainen luku $\delta_1 > 0$, että leikkaus $B(m, \delta_1) \cap M'$ muodostuu joko yhdestä janasta tai kahdesta janasta, joiden yhteinen päätepiste on kuulan keskipiste m (Kuva 42). Toisaalta pisteen $a \in \text{int}A$ etäisyys kompaktista joukosta M' on positiivinen, joten voidaan valita sellainen luku $\delta_2 > 0$, että $B(a, \delta_2) \cap M' = \emptyset$. Olkoon $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Piste m on joukon X' reunapiste, joten on olemassa piste $x_m \in X' \cap B(m, \delta)$. Luku δ valittiin niin, että leikkausjoukko $B(m, \delta) \cap \bar{X}'$ muodostuu yhdestä ympyräsektorista, joten $[x_m, m[\subset X'$. Piste a on myös joukon X' reunapiste, joten on olemassa piste $x_a \in X' \cap B(a, \delta)$. Jana $[x_a, a]$ kohtaa kaaren A, joten leikkausjoukko $[x_a, a] \cap A$ on epätyhjä. Se on lisäksi suljettu kahden suljetun joukon leikkauksena ja rajoitettu, joten se on tason osajoukkona kompakti. Näin on olemassa sellainen piste $a' \in [x_a, a] \cap A$, että $d(x_a, A) = d(x_a, a')$. Tällöin $[x_a, a'[\subset X'$. Lisäksi $a' \in \text{int}A$, sillä $a' \in B(a, \delta)$ ja $B(a, \delta) \cap M' = \emptyset$. Lauseen 2.3 nojalla komponentti X' on murtoviivayhtenäinen, joten on olemassa pisteet x_m ja x_a yhdistävä murtoviiva $N_0 \subset X'$. Olkoon $N = [m, x_m] \cup N_0 \cup [x_a, a']$. Joukko $N \subset \bar{X}'$ on pisteet m ja a' yhdistävä murtoviiva, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukkoon X'. Näin $K \cap N = \emptyset$. Myös $K \cap A = \emptyset$. Pisteet m ja a voidaan näin yhdistää polulla joukossa



KUVA 42

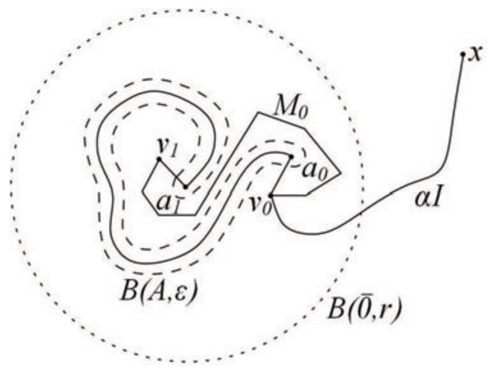
$\bar{X}' \setminus K \subset \bar{X}_1 \setminus K$ kulkemalla murtoviivaa N pisteestä m pisteeseen a' ja sen jälkeen kaarta A pitkin pisteestä a' pisteeseen a. Pisteet m ja a kuuluvat näin joukon $\bar{X}_1 \setminus K$ samaan komponenttiin. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä. Siis pisteet a ja m kuuluvat joukon $J \setminus \{z_i, z_i'\}$ eri komponentteihin jollain $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Seuraavassa lauseessa tarkastellaan Jordanin käyrään $J \subset \mathbb{R}^2$ sisältyvää kaarta A ja janoja $[v_i, a_i]$, missä a_i on kaaren A päätepiste sekä $[v_i, a_i[\subset X$ kun $i \in \{0, 1\}$. Tarkoitus on soveltaa tämän lauseen tulosta Lauseen 10.14 todistuksessa tilanteessa, jossa kaari A on jonkin jaon G_i kaari ja janat $[v_i, a_i]$ kuuluvat vastaavaan kokoelmaan H_i.

Lause 10.13. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Olkoon $A \subset J$ kaari ja olkoot sen päätepisteet a_0 ja a_1. Olkoot $[v_0, a_0]$ ja $[v_1, a_1]$ sellaisia janoja, että $[v_i, a_i[\subset X$ kun $i \in \{0, 1\}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa joukon X murtoviiva M, joka yhdistää pisteen $w_0 \in [v_0, a_0[$ pisteeseen $w_1 \in [v_1, a_1[$. Lisäksi $M \cap [v_i, a_i] = \{w_i\}$ ja $M \subset B(A, \varepsilon)$.*

Todistus: Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Joukko X on yhtenäisenä ja avoimena joukkona murtoviivayhtenäinen, joten on olemassa murtoviiva $M_0 \subset X$, joka yhdistää pisteet v_0 ja v_1. Voidaan olettaa, että $M_0 \cap [v_i, a_i] = \{v_i\}$. Muussa tapauksessa voitaisiin siirtyä tarkastelemaan janoja $[v_i', a_i]$ sekä pisteet v_1' ja v_2' yhdistävää murtoviivaa M_0', missä $v_i' \in [v_i, a_i] \cap M_0$ on se piste, jonka etäisyys pisteestä a_i on pienin. Tällaiset pisteet ovat olemassa, sillä joukko $[v_i, a_i] \cap M_0$ on kompakti.

Kaari A on rajoitettu, joten on olemassa sellainen luku $r > 0$, että $B(A, 1) \subset B(\bar{0}, r)$. Olkoon $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(\bar{0}, r)$. Jordanin kaarilauseen (Lause 3.7) mukaan joukko $\mathbb{R}^2 \setminus A$ on yhtenäinen, ja avoimena joukkona se on tällöin myös polkuyhtenäinen. Näin on olemassa joukon $\mathbb{R}^2 \setminus A$ polku $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^2 \setminus A$, joka yhdistää pisteen v_0 pisteeseen x (Kuva 43). Yhdiste $M_0 \cup \alpha I$ on tason suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti eikä kohtaa kaarta A. Näin $d(A, M_0 \cup \alpha I) > 0$. Oletetaan,

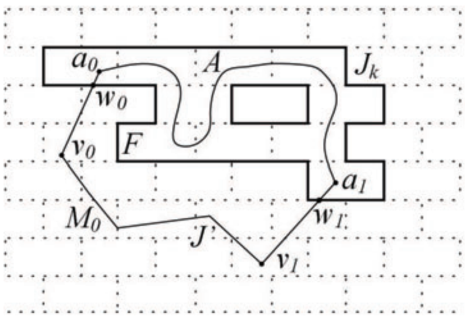


KUVA 43

että $\varepsilon < \min\{1, d(A, M_0 \cup \alpha I)/2\}$. Tällöin $M_0 \cup \alpha I \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(A, \varepsilon)$. Piste $x \in \alpha I$ kuuluu joukon $\mathbb{R}^2 \setminus B(A, \varepsilon)$ rajoittamattomaan komponenttiin, joten koko yhtenäinen joukko $M_0 \cup \alpha I$ sisältyy kyseiseen komponenttiin.

Jaetaan taso $\mathbb{R}^2$ kuvan 44 mukaisesti suljetuiksi suorakulmioiksi q_j, joiden jokaisen läpimitta on alle ε (vrt. Lause 3.6). Valitaan suunnat niin, että suorakulmioiden sivut ovat eri suuntaiset kuin janat $[v_i, a_i]$. Olkoon $F = \cup\{q_j : q_j \cap A \neq \emptyset\}$. Kaari A on rajoitettu, joten joukkoon F kuuluu äärellisen monta suorakulmiota q_j. Siten joukko F on suljettu. Se on myös polkuyhtenäinen, sillä jokainen suorakulmio q_j on polkuyhtenäinen ja kaari A yhdistää mitkä tahansa suorakulmiot, jotka sisältyvät joukkoon F. Suorakulmiot q_j ja joukko F on muodostettu niin, että $A \subset \text{int}F$. Jokaisen joukon $q_j \subset F$ läpimitta on alle ε, joten $F \subset B(A, \varepsilon)$. Siten $\mathbb{R}^2 \setminus B(A, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$. Joukon F reuna koostuu äärellisen monesta erillisestä monikulmiosta $J_1, \ldots, J_n$ (mahdollisesti vain yhdestä). Joukko F on yhtenäinen, joten rajoittamattoman komponentin U reuna on jokin näistä monikulmioista. Olkoon se J_k. Murtoviiva M_0 sisältyy joukon $\mathbb{R}^2 \setminus B(A, \varepsilon)$ rajoittamattomaan komponenttiin, jonka puolestaan täytyy sisältyä joukon $\mathbb{R}^2 \setminus F$ rajoittamattomaan komponenttiin U. Näin $A \subset \text{int}F$ ja $M_0 \subset U$, joten nämä joukot sisältyvät joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J_k$ eri komponentteihin (Kuva 44).

Tarkastellaan Jordanin käyrää $J' = A \cup [a_0, v_0] \cup M_0 \cup [v_1, a_1]$. Olkoon X' joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J'$ rajoitettu komponentti. Havaitaan, että $X' \subset X$. Kaari $A \subset \bar{X}'$ ja murtoviiva $M_0 \subset \bar{X}'$ sisältyvät joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J_k$ eri komponentteihin, joten ne sisältyvät myös joukon $\bar{X}' \setminus J_k$ eri komponentteihin. Joukko $J_k \cap \bar{X}'$ koostuu yhdestä tai useammasta erillisestä murtoviivasta ja toteuttaa Lauseen 10.12 joukkoa K koskevat ehdot. Näin Lauseen 10.12 mukaan on olemassa murtoviiva $M \subset J_k \cap \bar{X}'$, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukkoon X' ja jonka päätepisteet jakavat Jordanin käyrän J' kahteen komponenttiin niin, että A sisältyy niistä toiseen ja M_0 toiseen. Näin murtoviivan M päätepisteet $w_i \in [v_i, a_i[$, joten $M \subset X$. Lisäksi $M \subset J_k \subset F \subset B(A, \varepsilon)$. □



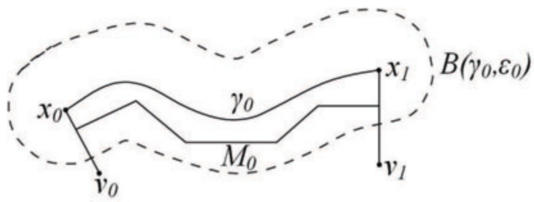
KUVA 44

Nyt voidaan todistaa lause, jonka todistukseen edelliset lauseet ovat tähdänneet. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetun komponentin sulkeuma on 2-solu, kun $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä:

Lause 10.14. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Tällöin joukko $\bar{X}$ on 2-solu.*

Todistus: Olkoot $G_1, G_2, \ldots$ kuten Lauseessa 10.9 ja $H_1, H_2, \ldots$ kuten Lauseessa 10.10. Voidaan olettaa, että $G_1 = \{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\}$. Olkoot kaaren γ_i päätepisteet x_i ja x_{i+1} jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$. Olkoot $[v_i, x_i]$ ja $[v_{i+1}, x_{i+1}] \in H_1$ kaaren γ_i päätepisteitä vastaavat janat jokaisella $i \in \mathbb{Z}_n$.

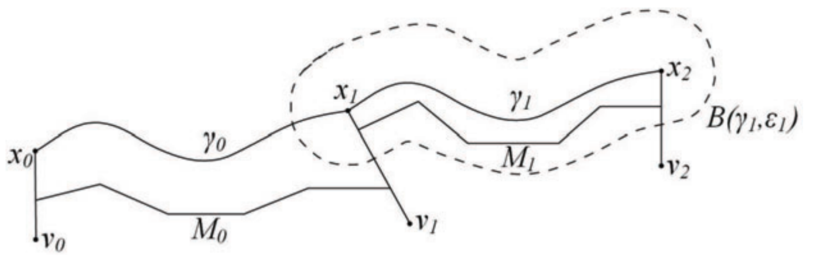
Tarkastellaan aluksi kaarta γ_0, jonka päätepisteet ovat siis x_0 ja x_1 (Kuva 45). Näitä pisteitä vastaavat siis joukon H_1 janat $[v_0, x_0]$



KUVA 45

ja $[v_1, x_1]$. Lauseen 10.9 mukaan $\gamma_0 \subset B(x_0, 1)$. Kaari γ_0 ja ympyrä $S(x_0, 1)$ ovat kompakteja ja erillisiä, joten niiden etäisyys $d(\gamma_0, S(x_0, 1)) > 0$. Olkoon $0 < \varepsilon_0 < d(\gamma_0, S(x_0, 1))$, jolloin $B(\gamma_0, \varepsilon_0) \subset B(x_0, 1)$. Lauseen 10.13 mukaan on olemassa lukua ε_0 vastaava joukon X murtoviiva M_0, joka sisältyy kuulaan $B(\gamma_0, \varepsilon_0)$ ja yhdistää pisteen $w_0 \in [v_0, x_0[$ pisteeseen $w_1 \in [v_1, x_1[$. Tällöin $M_0 \cup [w_1, x_1] \cup \gamma_0 \cup [x_0, w_0] \subset B(x_0, 1)$.

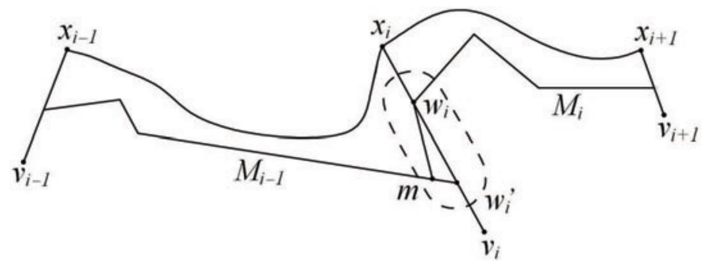
Siirrytään tarkastelemaan seuraavaa kaarta γ_1, jonka päätepisteet ovat x_1 ja x_2 (Kuva 46). Lauseen 10.9 mukaan $\gamma_1 \subset B(x_1, 1)$. Vastaavasti kuten edellä voidaan luku $\varepsilon_1 > 0$ valita pienemmäksi kuin etäisyys $d(\gamma_1, S(x_1, 1))$, jolloin $B(\gamma_1, \varepsilon_1) \subset B(x_1, 1)$. Lisäksi murtoviiva



KUVA 46

$M_0 \subset X$ ja kaari $\gamma_1 \subset J$ ovat kompakteja ja erillisiä, joten niiden etäisyys $d(\gamma_1, M_0) > 0$. Näin voidaan valita luku $\varepsilon_1 > 0$ myös tätä etäisyyttä pienemmäksi, jolloin $B(\gamma_1, \varepsilon_1) \cap M_0 = \emptyset$. Lauseen 10.13 mukaan on olemassa lukua ε_1 vastaava joukon X murtoviiva M_1, joka sisältyy kuulaan $B(\gamma_1, \varepsilon_1)$ ja yhdistää pisteen $w'_1 \in [v_1, x_1[$ pisteeseen $w_2 \in [v_2, x_2[$. Tällöin $M_1 \cap M_0 = \emptyset$.

Näin jatkaen voidaan muodostaa jokaista kaarta $\gamma_i \in G_1$ vastaava murtoviiva $M_i \subset X \cap B(x_i, 1)$. Valitsemalla jokainen luku ε_i pienemmäksi kuin etäisyys $d(\gamma_i, \cup_{k=1}^{i-1} M_k)$ varmistetaan lisäksi, että nämä murtoviivat eivät leikkaa toisiaan. Lopuksi muutetaan murtoviivoja hieman, jotta peräkkäisille murtoviivoille saadaan yhteinen päätepiste: Olkoot M_{i-1} ja M_i peräkkäiset murtoviivat (Kuva 47). Olkoon $w'_i \in [v_i, x_i[$

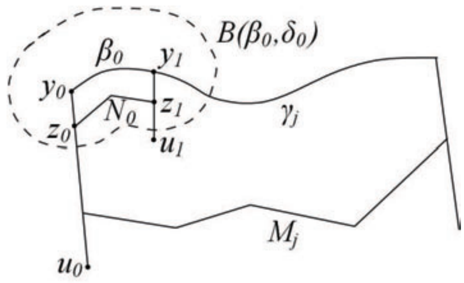


KUVA 47

murtoviivan M_{i-1} päätepiste ja olkoon vastaavasti $w_i \in [v_i, x_i[$ murtoviivan M_i päätepiste. Voidaan olettaa, että $d(w'_i, x_i) > d(w_i, x_i)$. Jana $[w'_i, w_i]$ ja Jordanin käyrä J ovat erilliset kompaktit joukot, joten janalla $[w'_i, w_i]$ on ympäristö $B([w'_i, w_i], r)$, joka ei kohtaa käyrää J. Valitaan piste $m \in M_{i-1} \cap (B([w'_i, w_i], r) \setminus [w'_i, w_i])$. Piste m voidaan yhdistää pisteeseen w_i joukon $B([w'_i, w_i], r)$ murtoviivalla, joka ei kohtaa janaa $[w'_i, w_i]$. Muutetaan murtoviivaa M_{i-1} korvaamalla pisteiden m ja w'_i välinen osuus tällä uudella pisteet m ja w_i yhdistävällä murtoviivalla. Tällöin murtoviiva M_{i-1} sisältyy edelleen kuulaan $B(x_{i-1}, 1)$.

Jakoon G_1 liittyvien murtoviivojen M_i yhdiste muodostaa näin monikulmion $J_0 \subset X$. Huomattavaa on, että jokainen murtoviiva M_i, joista monikulmio J_0 muodostuu, sisältyy johonkin kuulaan $B(x, 1)$, missä $x \in J$. Näin $J_0 \subset B(J, 1)$. Olkoon X_0 monikulmion J_0 sisäpuoli. Lauseen 10.2 nojalla joukko $\bar{X}_0$ on 2-solu.

Olkoon $\gamma_j \in G_1$. Siirrytään tarkastelemaan niitä jaon G_2 kaaria, jotka sisältyvät kaareen γ_j. Jaon G_2 kaarien määrä on äärellinen, joten voidaan merkitä $\{\beta \in G_2 : \beta \subset \gamma_j\} = \{\beta_0, \ldots, \beta_{m-1}\}$. Olkoot kaaren β_i päätepisteet y_i ja y_{i+1} jokaisella $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Olkoot $[u_i, y_i]$ ja $[u_{i+1}, y_{i+1}] \in H_2$ kaaren β_i päätepisteitä vastaavat janat jokaisella $i \in \{0, \ldots, m-1\}$. Tarkastellaan aluksi kaarta β_0, jonka päätepisteet ovat y_0 ja y_1 (Kuva 48). Lauseen 10.9 mukaan $\beta_0 \subset B(y_0, 1/2)$. Kuten edellä,

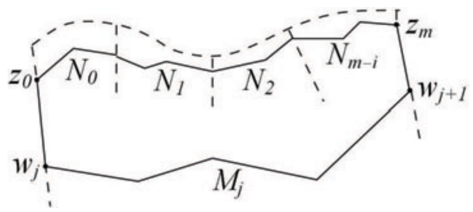


Kuva 48

etäisyys $d(\beta_0, S(y_0, 1/2)) > 0$. Olkoon $0 < \delta_0 < d(\beta_0, S(y_0, 1/2))$, jolloin $B(\beta_0, \delta_0) \subset B(y_0, 1/2)$. Kaari $\beta_0 \subset J$ ja monikulmio $J_0 \subset X$ ovat erillisiä ja kompakteja, joten etäisyys $d(\beta_0, J_0) > 0$. Näin luku $\delta_0 > 0$ voidaan valita myös tätä etäisyyttä pienemmäksi, jolloin $B(\beta_0, \delta_0) \cap J_0 = \emptyset$. Lauseen 10.13 mukaan on olemassa lukua δ_0 vastaava joukon X murtoviiva N_0, joka sisältyy kuulaan $B(\beta_0, \delta_0)$ ja yhdistää pisteen $z_0 \in [u_0, y_0[$ pisteeseen $z_1 \in [u_1, y_1[$. Näin $N_0 \cup [z_1, y_1] \cup \beta \cup [y_0, z_0] \subset B(y_0, 1/2)$. Erityisesti $N_0 \cap J_0 = \emptyset$.

Näin voidaan muodostaa jokaista kaarta $\beta_i \subset \gamma_j$ vastaava murtoviiva $N_i \subset X \cap B(y_i, 1/2)$, joka ei kohtaa monikulmiota J_0. Valitsemalla lisäksi jokainen luku δ_i pienemmäksi kuin etäisyys $d(\beta_i, \cup_{k=1}^{i-1} N_k)$ varmistetaan, että nämä murtoviivat eivät leikkaa toisiaan. Lopuksi muutetaan murtoviivoja kuten jaon G_1 tapauksessa, jotta peräkkäisille murtoviivoille saadaan yhteinen päätepiste. Tämän jälkeen muodostetaan yhdiste, johon kuuluvat kaikki edellä muodostetut murtoviivat N_i ($i \in \mathbb{Z}_m$) sekä lisäksi kaarta $\gamma_j \in G_1$ vastaava murtoviiva M_j ja janat $[w_j, z_0]$ ja $[w_{j+1}, z_m]$ (Kuva 49). Tämä yhdiste sisältää yhden ja vain yhden monikulmion. Kyseinen monikulmio sisältyy joukkoon $X \cap B(J, 1)$ ja sen sisäpuolen sulkeuma on Lauseen 10.2 nojalla 2-solu.

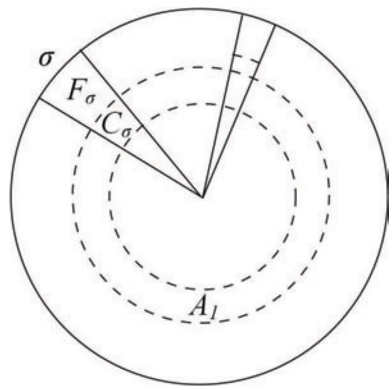
Vastaavalla tavalla voidaan muodostaa jaon G_1 muita kaaria vastaavat 2-solut. Varmistetaan niitä muodostettaessa, että kaikilla peräkkäisillä jaon G_2 kaaria vastaavilla murtoviivoilla on yhteinen päätepiste. Tällöin myös jaon G_2 kaaria vastaavien murtoviivojen yhdiste



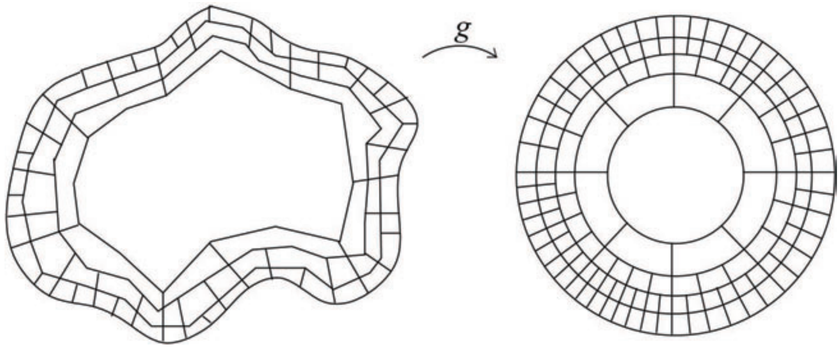
KUVA 49

on Jordanin monikulmio. Jaon G_1 kaaria vastaavat 2-solut muodostavat äärellisen kokoelman 2-soluja, jota merkitään $\mathcal{C}_1$. Edelleen voidaan muodostaa jaon G_2 kaaria vastaavat 2-solut, jolloin saadaan 2-solujen kokoelma $\mathcal{C}_2$, ja niin edelleen. Näin saadaan jono $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ 2-solujen äärellisiä kokoelmia. Jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$ joukko $\mathcal{C}_i$ sisältää siis kaikki jaon G_i kaariin liittyvät 2-solut ja nämä 2-solut sisältyvät joukkoon $X \cap B(J, 1/i)$. Olkoon $\mathcal{C}_i^*$ yhdiste joukkoon $\mathcal{C}_i$ kuuluvista 2-soluista. Jokaisen joukon $\mathcal{C}_i$ jokainen 2-solu sisältyy joukkoon X, joten $\bar{X}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i^* \subset X$. Toisaalta jos $x \in X$, niin on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $d(x, J) > 1/n$. Kokoelmien $\mathcal{C}_i$ 2-solut on muodostettu niin, että tällöin piste $x \in \bar{X}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i^*$. Näin $X = \bar{X}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i^*$.

Olkoon $f\colon J \to S^1$ homeomorfismi. Jokaisella $i \in \mathbb{N}$ olkoon $G_i' = \{\sigma \subset S^1 : \sigma = f\gamma, \gamma \in G_i\}$. Joukot G_i' ovat siis kaarten $\sigma \subset S^1$ kokoelmia. Olkoon $A_i = \{x \in B^2 : \frac{i}{i+1} \leq |x| \leq \frac{i+1}{i+2}\}$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Tällöin $A_1 = \{x \in B^2 : 1/2 \leq |x| \leq 2/3\}$, $A_2 = \{x \in B^2 : 2/3 \leq |x| \leq 3/4\}$ ja niin edelleen. Joukot A_i ovat siis kuulaan $B^2 = B(\bar{0}, 1)$ sisältyviä suljettuja ympyrärenkaita. Jokaisella kaarella $\sigma \subset S^1$ olkoon F_σ yhdiste kaikista janoista, jotka yhdistävät kaaren σ jonkin pisteen origoon. Jokainen joukko F_σ on siis kuulan $\bar{B}^2$ sektori. Jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$ voidaan muodostaa joukon G_i' jokaista kaarta σ vastaava leikkausjoukko $C_\sigma = A_i \cap F_\sigma$, joka on siis renkaan A_i ja kyseistä kaarta vastaavan sektorin F_σ leikkaus (Kuva 50). Näin saadaan jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$



KUVA 50



KUVA 51

2-solujen kokoelma $\mathcal{C}_i'$, jossa on yhtä monta 2-solua kuin kokoelmassa $\mathcal{C}_i$.

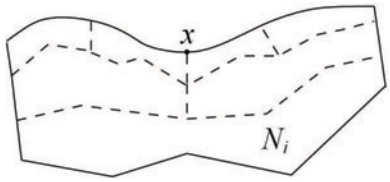
Olkoon L_i yhdiste kokoelman $\mathcal{C}_i$ 2-solujen reunoista, jotka ovat Jordanin monikulmioita. Olkoon vastaavasti L_i' yhdiste kokoelman $\mathcal{C}_i'$ 2-solujen reunoista (Kuva 51). Murtoviivat, janat ja kaaret ovat keskenään homeomorfisia, joten voidaan määritellä sellainen homeomorfismi $g\colon \cup_{i=1}^{\infty} L_i \to \cup_{i=1}^{\infty} L_i'$, että jokaista kaarta $\gamma \subset J$ vastaavalla 2-solulla C_γ pätee $g\partial C_\gamma = \partial C_\sigma$, missä $\sigma = f\gamma$. Tällöin $gJ_0 = \partial \bar{B}(0, 1/2)$. Myös joukot $\bar{X}_0$ ja $\bar{B}(0, 1/2)$ ovat 2-soluja avaruudessa $\mathbb{R}^2$, joten Lauseen 10.5 mukaan on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon X \to B^2$, että $h\bar{X}_0 = \bar{B}(0, 1/2)$, $hC_\gamma = C_\sigma$ jokaisella $\gamma \subset J$ ja $h| \cup_{i=1}^{\infty} L_i = g$.

Osoitetaan, että paloittain määritelty kuvaus $f_0\colon \bar{X} \to \bar{B}^2$,

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \in J \\ h(x), & x \in X, \end{cases}$$

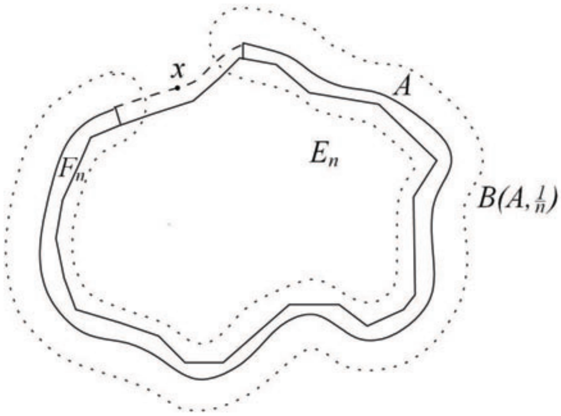
on homeomorfismi. Koska molemmat kuvaukset f ja h ovat bijektioita ja $fJ \cap hX = \emptyset$ sekä $fJ \cup hX = \bar{B}^2$, niin kuvaus f_0 on bijektio. Joukot X ja B^2 ovat avoimia, joten kuvaus f_0 on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$ ja sen käänteiskuvaus f_0^{-1} on jatkuva jokaisessa pisteessä $y \in B^2$. Tavoitteena on seuraavaksi osoittaa, että kuvaus f_0 on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in J$.

Olkoon $x \in J$ ja olkoon $y = f_0(x)$. Jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$ olkoon N_i yhdiste kaarista $\gamma \in G_i$, jotka sisältävät pisteen x, sekä 2-soluista, jotka vastaavat näihin kaariin sisältyviä kaaria $\beta \in G_j$, $j \geq i$ (Kuva 52). Sellaisia kaaria $\gamma \in G_i$, jotka sisältävät pisteen x on joko kaksi tai yksi, riippuen siitä, onko piste x tällaisen kaaren päätepiste vai ei. Näin $N_i \subset B(x, 1/i)$. Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$ piste x on joukon N_i sisäpiste avaruudessa $\bar{X}$. Olkoon $i \in \mathbb{N}$. Olkoon A joukon $J \setminus N_i$ sulkeuma avaruudessa J. Jokaisella indeksillä $n \in \mathbb{N}$ joukkoon A sisältyviä kaaria $\beta \in G_n$ vastaavat 2-solut sisältyvät joukkoon $B(A, 1/n)$. Indeksi n voidaan näin valita niin suureksi, että $1/n < d(x, A)/2$. Olkoon $F_n = \cup\{C_\beta : \beta \in G_j, j \geq n, \beta \subset A\}$ (Kuva



KUVA 52

53). Tällöin $F_n \subset B(A, 1/n)$, joten $x \notin \bar{F}_n$. Olkoon $E_n = \cup\{C_\beta : \beta \in G_j, j \leq n\}$. Tällöin $x \notin E_n = \bar{E}_n$. Myöskään $x \notin \bar{X}_0$. Tehdään vastaoletus, että piste $x \in N_i$ ei ole joukon N_i sisäpiste avaruudessa $\bar{X}$. Tällöin se on joukon N_i reunapiste avaruudessa $\bar{X}$. Näin sen jokainen ympäristö kohtaa joukon N_i ja joukon $\bar{X} \setminus N_i$. Joukko $\bar{X} \setminus N_i \subset X_0 \cup E_n \cup F_n \cup A$, joten piste x on tällöin myös jonkin tämän yhdisteen joukon reunapiste. Edellä on kuitenkin osoitettu, että näin ei ole. Siis vastaoletus on väärä ja piste x on joukon N_i sisäpiste avaruudessa $\bar{X}$. Näin jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen luku $\delta_i > 0$, että $B(x, \delta_i) \cap \bar{X} \subset N_i$.



KUVA 53

Olkoon $i \in \mathbb{N}$. Siirrytään tarkastelemaan kuvajoukkoa $f_0 N_i$. Se on ympyräsektorin ja muotoa $\{x \in \bar{B}^2 : |x| \geq \frac{i}{i+1}\}$ olevan renkaan leikkaus ja piste $y = f_0(x) \in S^1$ on joukon $f_0 N_i$ sisäpiste avaruudessa $\bar{B}^2$. Näin jokaisella indeksillä $i \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen luku $\delta'_i > 0$, että $B(y, \delta'_i) \cap \bar{B}^2 \subset f_0 N_i$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että $f_0 N_i \subset B(y, \varepsilon)$, kunhan indeksi $i \in \mathbb{N}$ on riittävän suuri: Joukko $N_i \cap J$, joka muodostuu yhdestä tai kahdesta kaaresta $\gamma \in G_i$, sisältyy Lauseen 10.9 nojalla kuulaan $B(x, 1/i)$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f\colon J \to S^1$ on jatkuva, joten $fB(x, 1/i) \subset B(y, \varepsilon) \cap S^1$ kun indeksi i on riittävän suuri. Näin kaari $f_0 N_i \cap S^1 = f(N_i \cap J) \subset B(y, \varepsilon) \cap S^1$, kun indeksi i on riittävän suuri. Lisäksi rengas $\{x \in \bar{B}^2 : |x| \geq \frac{i}{i+1}\}$ saadaan miten kapeaksi tahansa kasvattamalla indeksiä $i \in \mathbb{N}$. Näin on olemassa sellainen indeksi $i \in \mathbb{N}$, että $f_0 N_i \subset B(y, \varepsilon)$, ja tätä indeksiä vastaa sellainen luku $\delta_i > 0$, että $B(x, \delta_i) \cap \bar{X} \subset N_i$. Siis on olemassa sellainen luku $\delta_i > 0$, että $f_0 \big(B(x, \delta_i) \cap \bar{X}\big) \subset f_0 N_i \subset B(y, \varepsilon)$. Näin kuvaus f_0 on jatkuva pisteessä $x \in J$.

Kuvaus $f_0 \colon \bar{X} \to \bar{B}^2$ on siis jatkuva bijektio. Kirjassa [6] on osoitettu, että kompaktissa joukossa määritelty jatkuva bijektio on aina homeomorfismi (Seuraus 13.26). Joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitetun komponentin sulkeuma $\bar{X}$ on kompakti, joten kuvaus f_0 on homeomorfismi. □

Lauseiden 10.5 ja 10.14 avulla saadaan helposti seuraava tulos:

Lause 10.15. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon X joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoitettu komponentti. Olkoon $f \colon J \to J' \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfismi. Olkoon X' joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J'$ rajoitettu komponentti. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h \colon \bar{X} \to \bar{X}'$, että $h|J = f$.*

Todistus: Lauseen 10.14 mukaan joukot $\bar{X}$ ja $\bar{X}'$ ovat 2-soluja. Lauseen 10.5 mukaan tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h \colon \bar{X} \to \bar{X}'$, että $h|J = f$. □

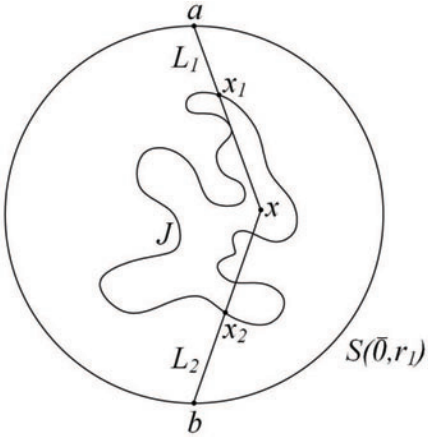
Seuraavaa lemmaa käytetään Lauseen 10.17 todistuksessa.

Lemma 10.16. *Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja olkoon kuvaus $f \colon X \to Y$ injektio. Oletetaan, että $X = A \cup B$, missä joukot A ja B ovat suljettuja avaruudessa X. Oletetaan myös, että joukot fA ja fB ovat suljettuja kuvajoukossa fX, ja että rajoittumat $f|A \colon A \to Y$ ja $f|B \colon B \to Y$ ovat upotuksia. Tällöin kuvaus f on upotus.*

Todistus: Kirjassa [6] on osoitettu, että kuvaus f on jatkuva (Lause 7.13). Oletuksen mukaan kuvaus f on injektio, joten se määrittelee bijektion $f_1 \colon X \to fX$. On osoitettava, että käänteiskuvaus $f_1^{-1} \colon fX \to X$ on jatkuva. Tehdään tämä osoittamalla, että jokaisen suljetun joukon $F \subset X$ alkukuva $(f^{-1})^{-1}F = fF$ on suljettu joukossa fX. Olkoon $F \subset X$ suljettu. Joukko $fF = f((F \cap A) \cup (F \cap B)) = f(F \cap A) \cup f(F \cap B) = (f|A)(F \cap A) \cup (f|B)(F \cap B)$. Joukko $F \cap A$ on suljettu joukossa A ja rajoittuma $f|A$ on upotus, joten joukko $(f|A)(F \cap A)$ on suljettu joukossa fA. Tämä taas on oletuksen mukaan suljettu joukossa fX. Siis joukko $(f|A)(F \cap A)$ on suljettu joukossa fX. Vastaavasti voidaan päätellä, että joukko $(f|B)(F \cap B)$ on suljettu joukossa fX. Näin kuvajoukko fF on kahden suljetun joukon yhdisteenä itsekin suljettu joukossa fX . □

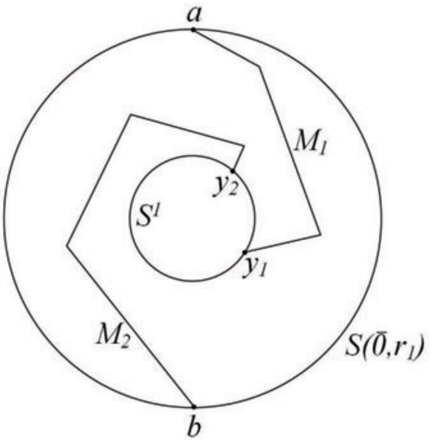
Lauseiden 10.5 ja 10.14 avulla todistetaan seuraavaksi Schönfliesin lause, jonka mukaan jokainen upotus $f \colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ voidaan jatkaa homeomorfismiksi $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Lause 10.17 (Schönfliesin lause)**.** *Olkoon $f \colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ upotus. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h|S^1 = f$.*



KUVA 54

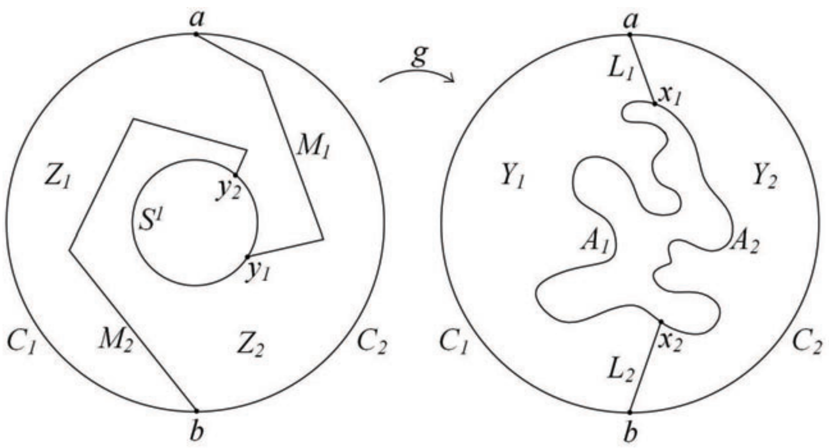
Todistus: Olkoon $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ upotus ja olkoon $J = fS^1$. Tällöin joukko $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä, ja upotus f määrittelee homeomorfismin $S^1 \to J$. Olkoon joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J$ rajoittamaton komponentti X_0 ja rajoitettu komponentti X_1. Jordanin käyrä J on rajoitettu, joten on olemassa sellainen luku $r_0 > 2$, että $J \subset B(\bar{0}, r_0)$. Olkoon $r_1 = r_0 + 1$ ja merkitään $a = (0, r_1)$, $b = (0, -r_1)$. Olkoon $x \in X_1$. Havaitaan, että janat $[x, a]$ ja $[x, b]$ kohtaavat toisensa ainoastaan pisteessä x (Kuva 54). Pisteet a, $b \in X_0 \subset \complement X_1$, joten janat $[x, a]$ ja $[x, b]$ kohtaavat reunan $\partial X_1 = J$. Nämä janat sekä käyrä J ovat kompakteja, joten myös leikkausjoukot $[x, a] \cap J$ ja $[x, b] \cap J$ ovat kompakteja. Näin joukossa $[x, a] \cap J$ on olemassa piste $x_1 \neq a$, joka on lähinnä pistettä a. Tällöin $[a, x_1[\subset X_0$. Vastaavasti joukossa $[x, b] \cap J$ on sellainen piste $x_2 \neq b$, että $[b, x_2[\subset X_0$. Lisäksi siis $x_1 \neq x \neq x_2$, sillä $x_1, x_2 \in J$ ja $x \in X_1$. Näin janat $[a, x_1]$ ja $[b, x_2]$ ovat erillisiä. Merkitään $L_1 = [a, x_1]$ ja $L_2 = [b, x_2]$.



KUVA 55

Siirrytään tarkastelemaan pisteitä $y_1 = f^{-1}(x_1)$ ja $y_2 = f^{-1}(x_2) \in S^1$. Pisteet y_1 ja $a \in S(\bar{0}, r_1)$ voidaan yhdistää murtoviivalla M_1, joka päätepisteitään lukuunottamatta sisältyy joukkoon $B(\bar{0}, r_1) \setminus \bar{B}^2$. Vastaavasti pisteet y_2 ja $b \in S(\bar{0}, r_1)$ voidaan yhdistää murtoviivalla M_2, joka myös sisältyy päätepisteitään lukuunottamatta joukkoon $B(\bar{0}, r_1) \setminus \bar{B}^2$. Nämä murtoviivat voidaan aina valita sellaisiksi, etteivät ne leikkaa toisiaan (Kuva 55).

Nyt voidaan muodostaa neljä uutta Jordanin käyrää (Kuva 56). Käyrä J_1' muodostuu puoliympyrästä $C_1 = \{x \in S(\bar{0}, r_1) : pr_1(x) \leq 0\}$, murtoviivoista M_1 ja M_2 sekä pisteet y_1 ja y_2 yhdistävästä ympyrän S^1 kaaresta. Käyrä J_2' muodostuu vastaavasti puoliympyrästä $C_2 = \{x \in S(\bar{0}, r_1) : pr_1(x) \geq 0\}$, murtoviivoista M_1 ja M_2 sekä toisesta pisteet y_1 ja y_2 yhdistävästä ympyrän S^1 kaaresta. Käyrä J_1 muodostuu puoliympyrästä C_1, janoista L_1 ja L_2 sekä pisteet x_1 ja x_2 yhdistävästä kaaresta $A_1 \subset J$. Käyrä J_2 muodostuu vastaavasti puoliympyrästä C_2, janoista L_1 ja L_2 sekä pisteet x_1 ja x_2 yhdistävästä kaaresta $A_2 \subset J$.



Kuva 56

Olkoon $F' = S^1 \cup M_1 \cup M_2 \cup S(\bar{0}, r_1)$ ja olkoon $F = J \cup L_1 \cup L_2 \cup S(\bar{0}, r_1)$. Murtoviiva M_i on homeomorfinen janan L_i kanssa ($i \in \{1, 2\}$), joten on olemassa homeomorfismit $g_i \colon M_i \to L_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Määritellään kuvaus $g \colon F' \to F$ asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S^1 \\ g_i(x), & x \in M_i \\ \mathrm{id}(x), & x \in S(\bar{0}, r_1), \end{cases}$$

Lemman 10.16 nojalla kuvaus g on homeomorfismi.

Olkoon Y_i joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J_i$ rajoitettu komponentti ja olkoon Z_i joukon $\mathbb{R}^2 \setminus J_i'$ rajoitettu komponentti, ($i \in \{1, 2\}$). Lauseen 10.14 nojalla joukko $\bar{X}_1$ on 2-solu kuten myös joukot $\bar{Y}_i$ ja $\bar{Z}_i$, ($i \in \{1, 2\}$). Lauseen 10.5 mukaan tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h_1 \colon \bar{B}(\bar{0}, r_1) \to$

$\bar{B}(\bar{0}, r_1)$, että $h_1\bar{B}^2 = \bar{X}_1$, $h_1\bar{Z}_i = \bar{Y}_i$, $(i \in \{1, 2\})$ ja $h_1|F' = g$. Määritellään kuvaus $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in \bar{B}(\bar{0}, r_1) \\ \mathrm{id}(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus B(\bar{0}, r_1), \end{cases}$$

Lemman 10.16 nojalla kuvaus h on homeomorfismi ja lisäksi $h|S^1 = h_1|S^1 = g|S^1 = f$. □

Todistetaan vielä toinen muotoilu Schönfliesin lauseelle:

Lause 10.18. *Olkoon $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä ja olkoon $f\colon J \to \mathbb{R}^2$ upotus. Tällöin on olemassa sellainen homeomorfismi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h|J = f$.*

Todistus: Koska $J \subset \mathbb{R}^2$ on Jordanin käyrä, niin on olemassa homeomorfismi $f_0\colon S^1 \to J$. Yhdistetty kuvaus $f \circ f_0\colon S^1 \to fJ$ on myös homeomorfismi. Schönfliesin lauseen (Lause 10.17) mukaan on olemassa sellaiset homeomorfismit h_0, $h_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $h_0|S^1 = f_0$ ja $h_1|S^1 = f \circ f_0$. Yhdistetty kuvaus $h = h_1 \circ h_0^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on homeomorfismi ja $h|J = (h_1 \circ h_0^{-1})|J = f \circ f_0 \circ f_0^{-1} = f$. □

11. Viitteet

[1] C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge 1980.

[2] T. Lawson, *Topology: a geometric approach*, Oxford University Press New York, Oxford 2003.

[3] E.E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York 1977.

[4] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York 1966.

[5] C.T.C. Wall, *A geometric introduction to topology*, Dover Publications, New York 1993.

[6] J. Väisälä, *Topologia I*, Limes ry, Helsinki 2002.

[7] J. Väisälä, *Topologia II*, Limes ry, Helsinki 1999.

[8] www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies.

[9] www.math.ohio-state.edu/~fiedorow/math655/Jordan.html.